Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2011
09.06.2011

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Es sei γ der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ zunächst direkt und anschließend mit dem Gaußschen Integralsatz.

Aufgabe 2

Berechnen Sie unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\iint_G (x^2 + y)\, d(x,y)\,, \qquad \text{wobei } G := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\big\}\,.$$

Aufgabe 3

Es sei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < (x-1)^2 + y^2 < 4\}$. Rechnen Sie für $v_1(x,y) := x^2 + xy$ und $v_2(x,y) := x^2 y - y^2$ nach:

$$\iint_G \big(D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)\big)\, d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Aufgabe 4

Sei $G := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 < 3x^2 + 4y^2\big\}$ und γ der positiv orientierte Rand von G.

a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung von γ mittels Polarkoordinaten.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von G. (*Hinweis*: Leibnizsche Sektorformel)

Aufgabe 5

Die Vektorfelder $\vec{v}, \vec{w} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3yx \\ 2y + z^3x^2 \\ y^2 + 3z^2yx^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w}(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Potentialfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s},$$

wobei γ durch die Parametrisierung $\vec{r} \colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (1-t, t, 0)$ gegeben ist.

Aufgabe 6

a) Finden Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$\vec{v} \colon \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z > 0\big\} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + ay - 3z \\ x + 2y + bz \\ cx + y + 4z \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld ist, und berechnen Sie ein zugehöriges Potential.

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} (1+2xy)g(xy) \\ 2x^2 g(xy) + 1 \end{pmatrix},$$

wobei $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist.

Bestimmen Sie g so, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ ist und $g(0) = 2$ gilt, und ermitteln Sie für dieses g ein Potential von $\vec{v}$.

Achtung: Am Freitag, den 10.06., findet am Übungstermin (13:30 bis 15:00 Uhr, Hörsaal am Fasanengarten) eine Vorlesung statt.

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am Montag, den 19.09.2011, statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, der 15.07.2011.**
Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etecphys2011s/.