Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Sommersemester 2012
19.04.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$?

a) $\left\{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \exists C > 0\, \forall j \in \mathbb{N}: \, |x_j| \leqslant C\right\}$

b) $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,\middle|\, f(0) = 0\right\}$

c) $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,\middle|\, f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\right\}$

d) $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,\middle|\, f \text{ ist surjektiv}\right\}$

Aufgabe 2

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Zeigen Sie:

- **i)** Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear abhängig.
- **ii)** Es gibt keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

c) Seien $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

a) Jede Menge M von Vektoren aus V mit $0 \in M$ ist linear abhängig.

b) Ist $M := \{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus M als Linearkombination der anderen Vektoren aus M darstellen.

c) Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_n$, dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

d) Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \ldots, v_n + v$ linear unabhängig.

e) Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2, v_3 linear unabhängig.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Bestimmen Sie (gegebenenfalls in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern) die Zeilennormalform und den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie, dass die durch $f(x) := 2$, $g(x) := x - 1$ und $h(x) := x^2 + 3x$ definierten Funktionen f, g und h aus $C([0,1])$ linear unabhängig sind.

b) Sei $P_2([0,1]) := \{p\colon [0,1] \to \mathbb{C} \mid p \text{ ist Polynom vom Grad } \leqslant 2\}$. Begründen Sie, dass f, g, h eine Basis von $P_2([0,1])$ bildet.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des durch $p(x) = 8x^2 + 2x + 2$, $x \in [0,1]$, gegebenen Polynoms p bzgl. der Basis f, g, h, d.h. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^3$ mit $p = \alpha_1 f + \alpha_2 g + \alpha_3 h$.

Wichtige Termine im Sommersemester 2012:
Übungsklausur zu HM II: Samstag, 07.07.2012, 09:00 - 11:00 Uhr.
Klausur zu HM II: Montag, 17.09.2012, 08:00 - 09:30 Uhr.
Klausur zu KAI: Montag, 17.09.2012, 10:30 - 11:30 Uhr.
Anmeldeschluss ist Freitag, der 20.07.2012. Details zur Prüfungsanmeldung werden in Kürze bekannt gegeben.

Personen:
Dozent: Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Sprechzeit: nach Vereinbarung; Zimmer 3B-01 (Allianz-Gebäude, 05.20)
E-Mail: dirk.hundertmark@kit.edu

Übungsleiter: Dr. Matthias Uhl
Sprechzeit: Donnerstag, 11 - 12 Uhr; Zimmer 3A-04 (Allianz-Gebäude, 05.20)
E-Mail: matthias.uhl@kit.edu

Übungsblätter:
Jeden Donnerstag erscheint ein Übungsblatt mit Übungsaufgaben zur schriftlichen Bearbeitung. Dieses kann in einem Kasten neben Zimmer 3A-03 (Allianz-Gebäude, 05.20) abgeholt oder von der Vorlesungshomepage

`www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etec2012s/`

heruntergeladen werden. Die Besprechung der Übungsaufgaben erfolgt in den Tutorien der folgenden Woche. Zusätzlich werden Lösungsvorschläge auf der Vorlesungshomepage zum Download bereitgestellt.

Tutorien:
Die Tutorien finden ab der zweiten Vorlesungswoche statt. Details zur Online-Anmeldung entnehmen Sie bitte dem Hinweisblatt, welches auf der Vorlesungshomepage verfügbar ist.