Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Sommersemester 2012
26.04.2012

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

## 2. Übungsblatt

### Aufgabe 6

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ von:

**a)**

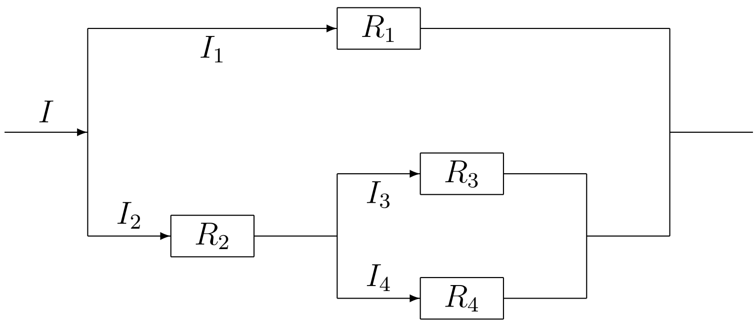
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 = & 2 \\ -2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 = & -3 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 = & -1 \end{array}$$

### Aufgabe 7

Gegeben ist die folgende Gleichstromschaltung:




Es gelte $I = 1\,[A]$ und $R_1 = R_2 = R_3 = \alpha\,[\Omega]$ sowie $R_4 = \beta\,[\Omega]$.

**a)** Stellen Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze ein lineares Gleichungssystem für die Ströme $I_1$ bis $I_4$ auf.

**b)** Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $\alpha$ und $\beta$ die Lösbarkeit des in **a)** erhaltenen linearen Gleichungssystems.

Bestätigen Sie dabei, dass das System für physikalisch sinnvolle Werte von $\alpha$ und $\beta$ (nämlich $\alpha, \beta > 0$) stets eindeutig lösbar ist.

## Aufgabe 8

**a)** Gegeben sei die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)\,.$$

Zeigen Sie, dass $\phi$ linear ist, und bestimmen Sie Kern $\phi$ sowie Bild $\phi$.

**b)** Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Für jedes $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ definiere

$$P_a(x) := \left(\sum_{j=1}^{3} x_j a_j\right) a\,.$$

**i)** Begründen Sie, dass die Abbildung $P_a\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear ist.

**ii)** Geben Sie die Darstellungsmatrix von $P_a$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ an.

**c)** Die lineare Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\phi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3\,, \qquad \phi(e_2 + e_3) = e_1\,, \qquad \phi(e_1 + e_2 + e_3) = e_2 - e_3\,.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $\phi$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

## Aufgabe 9

Im Vektorraum $C^2((-\pi, \pi))$ der auf $(-\pi, \pi)$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen seien die Funktionen $v_1, v_2, v_3, v_4\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$v_1(x) = \sin x, \qquad v_2(x) = \cos x, \qquad v_3(x) = x \sin x, \qquad v_4(x) = x \cos x.$$

**a)** Zeigen Sie, dass $v_1, v_2, v_3, v_4$ eine Basis von $W := \operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ ist.

**b)** Für $f \in W$ definiere $D(f) := f'$. Begründen Sie, dass $D$ von $W$ nach $W$ abbildet, und zeigen Sie, dass die Abbildung $D\colon W \to W, f \mapsto f'$, linear ist.

**c)** Geben Sie die Darstellungsmatrix von $D\colon W \to W$ und $D^2\colon W \to W$ bezüglich der Basis $v_1, v_2, v_3, v_4$ von $W$ an. (Dabei ist $D^2(f) := D(D(f))$ für $f \in W$.)

**d)** Sei $g\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x \sin x + 5 \cos x$. Berechnen Sie $D^2(g)$ mit Hilfe der Darstellungsmatrix aus Teil **c)** und führen Sie eine Probe Ihrer Rechnung durch.

## Aufgabe 10

**a)** Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$A + B, \quad A + C, \quad 3C, \quad AB, \quad BA, \quad CB, \quad (A+B)C.$$

**b)** Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie alle Matrizen $L \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.