Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Sommersemester 2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 11

a) Mit Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 5Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & -5 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_1]{Z_3 \to Z_3 + 5Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - 3Z_3]{Z_4 \to Z_4 - 6Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & -14 & -15 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -30 & -30 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 + 2Z_1]{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & 15 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{permutieren}]{\text{Zeilen}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass A regulär ist, und haben zugleich $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ berechnet.

Für die Matrix B ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - Z_2]{Z_4 \to Z_4 - 3Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist B regulär mit $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

hat die Matrix C den Rang 2, so dass $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ nicht regulär ist.

Da A und B regulär sind, gilt:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 42 & 49 & 10 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -38 & -45 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 & -2 \\ 1 & 5 & 15 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$((AB)^T)^{-1} = ((AB)^{-1})^T = \begin{pmatrix} 42 & 5 & 12 & -38 \\ 49 & 5 & 15 & -45 \\ 10 & 1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hier verwendeten wir das folgende Resultat: Ist $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so ist auch D^T regulär und es gilt $(D^T)^{-1} = (D^{-1})^T$.

In der Tat ergibt sich mit den Rechenreglen für das Transponieren von Matrizen

$$(D^{-1})^T D^T = (DD^{-1})^T = I_n^T = I_n \qquad \text{und} \qquad D^T(D^{-1})^T = (D^{-1}D)^T = I_n^T = I_n\,.$$

b) Da A und AB regulär sind, erhalten wir jeweils die eindeutig bestimmten Lösungen

$$x = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad x = (AB)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12

Wiederholung des Gram-Schmidt-Verfahrens:
In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ seien n linear unabhängige Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ gegeben. Wir wollen ein Orthonormalsystem $u_1, \ldots, u_n \in V$ so konstruieren, dass $\text{lin}\{u_1, \ldots, u_j\} = \text{lin}\{x_1, \ldots, x_j\}$ für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt.
Wir bestimmen zunächst nur ein Orthogonalsystem $v_1, \ldots, v_n$ mit der Eigenschaft $\text{lin}\{v_1, \ldots, v_j\} = \text{lin}\{x_1, \ldots, x_j\}$ für alle $j = 1, \ldots, n$. (Bei einem Orthogonalsystem wird nur verlangt, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind, nicht aber, dass sie Norm 1 haben.) Die Forderung $\text{lin}\{v_1\} = \text{lin}\{x_1\}$ können wir erfüllen, indem wir $v_1 := x_1$ setzen. Dann geht unser Verfahren rekursiv weiter: Haben wir für ein gewisses $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ ein Orthogonalsystem $v_1, \ldots, v_j$ mit $\text{lin}\{v_1, \ldots, v_j\} = \text{lin}\{x_1, \ldots, x_j\}$ gefunden, so ist die Frage, wie wir v_{j+1} definieren sollen. Setzen wir

$$v_{j+1} := x_{j+1} + \sum_{k=1}^{j} \lambda_k v_k$$

mit gewissen $\lambda_k \in \mathbb{K}$, so ist die Forderung $\operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_{j+1}\} = \operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_{j+1}\}$ erfüllt. Damit dieses v_{j+1} zusätzlich orthogonal zu allen v_i mit $i \in \{1,\dots,j\}$ ist, muss

$$0 \overset{!}{=} \langle v_{j+1}, v_i \rangle = \langle x_{j+1}, v_i \rangle + \sum_{k=1}^{j} \lambda_k \langle v_k, v_i \rangle = \langle x_{j+1}, v_i \rangle + \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$$

für alle $i \in \{1,\dots,j\}$ gelten. Folglich wählen wir

$$\lambda_i := -\frac{\langle x_{j+1}, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = -\frac{\langle x_{j+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}\,.$$

Fassen wir zusammen: Die Vektoren $v_1,\dots,v_n$ werden rekursiv definiert durch

$$v_1 := x_1\,, \qquad v_{j+1} := x_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle x_{j+1}, v_k \rangle}{\|v_k\|^2}\, v_k \quad (j = 1,\dots,n-1)\,.$$

Man beachte: Die Vektoren $x_1,\dots,x_n$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig; daher gilt $x_1 \neq 0$ und $x_{j+1} \notin \operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\} = \operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_j\}$ für $j = 1,\dots,n-1$, und damit folgt $v_j \neq 0$ für alle j. Somit ist die Division durch $\|v_k\|^2$ möglich.
Setzen wir nun noch $u_j := v_j/\|v_j\|$ $(j = 1,\dots,n)$, so haben wir ein Orthonormalsystem mit den geforderten Eigenschaften bestimmt.

a) Die gegebenen Vektoren x_1, x_2, x_3 sind linear unabhängig. Um das zu sehen, kann man die Vektoren zeilenweise in eine Matrix schreiben und diese auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2i & 0 \\ 5 & 3i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 5Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 3i & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - \frac{3}{2} Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Führe nun das Gram-Schmidt-Verfahren durch:

$$v_1 := x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\langle x_2, v_1 \rangle = \Big\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\rangle = 2 \cdot \overline{1} + 2i \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1} = 2$$

erhalten wir

$$v_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Beachte: Es gilt $\|v_2\| = (|1|^2 + |2i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$.) Für die Berechnung von v_3 brauchen wir die Skalarprodukte

$$\langle x_3, v_1 \rangle = \Big\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{0} + 1 \cdot \overline{1} = 6\,,$$

$$\langle x_3, v_2 \rangle = \Big\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} \Big\rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{2i} + 1 \cdot \overline{(-1)} = 5 - 6i^2 - 1 = 10\,.$$

Damit ergibt sich dann

$$
\begin{aligned}
v_3 &:= x_3 - \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v_3, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \\
u_3 &:= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Fazit: u_1, u_2, u_3 ist ein Orthonormalsystem mit den gewünschten Eigenschaften.

b) Wir wollen das Verfahren von Gram-Schmidt benutzen. Dazu prüfen wir zuerst die gegebenen Vektoren y_1, y_2, y_3 auf lineare Unabhängigkeit:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 3Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 5Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & -6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Somit sind y_1, y_2, y_3 linear abhängig, insbesondere können wir an der Zeilenstufenform ablesen, dass y_3 eine Linearkombination von y_1 und y_2 ist (dies ist möglich, da bei den Zeilenumformungen keine Zeilen vertauscht wurden). Infolgedessen gilt $\operatorname{lin}\{y_1, y_2, y_3\} = \operatorname{lin}\{y_1, y_2\}$.

Wir sehen außerdem, dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{y_1, y_2\}$ führen wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt durch:

$$
v_1 := y_1, \quad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{1}{2} y_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

Weiter ist $\langle y_2, v_1 \rangle = 5 - 1 + 1 - 1 = 4$ und wir erhalten

$$
v_2 := y_2 - \frac{\langle y_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Folglich bilden u_1, u_2 eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{y_1, y_2\} = \operatorname{lin}\{y_1, y_2, y_3\}$.

Aufgabe 13

a) Die Aussage ist wahr: Sei $x \in V$. Da die Gleichung $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$ gilt, ist diese insbesondere für $y = x$ erfüllt. Also haben wir $\langle x, x \rangle = 0$. Nach Definition des Skalarprodukts kann dies nur für $x = 0$ der Fall sein.

b) Die Aussage ist wahr: Seien $x_1, \ldots, x_n, x \in V$. Es gelte $x \neq 0$ und $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Wäre $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} = V$, so hätten wir $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$. Aus **a)** folgte dann unmittelbar $x = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq 0$. Also ist die Annahme falsch und es gilt $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} \neq V$.

Aufgabe 14

a) Vorüberlegung: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Bezeichnet a_j die j-te Spalte von A, so gilt

$$A^*A = \begin{pmatrix} \overline{a_1}^T \\ \overline{a_2}^T \\ \vdots \\ \overline{a_n}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a_1}^T a_1 & \overline{a_1}^T a_2 & \cdots & \overline{a_1}^T a_n \\ \overline{a_2}^T a_1 & \overline{a_2}^T a_2 & \cdots & \overline{a_2}^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_n}^T a_1 & \overline{a_n}^T a_2 & \cdots & \overline{a_n}^T a_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_2, a_1\rangle & \cdots & \langle a_n, a_1\rangle \\ \langle a_1, a_2\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \cdots & \langle a_n, a_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_1, a_n\rangle & \langle a_2, a_n\rangle & \cdots & \langle a_n, a_n\rangle \end{pmatrix}.$$

In A^*A ist also $\langle a_j, a_k\rangle$ das Element in der k-ten Zeile und j-ten Spalte. Hiermit erhalten wir

$$A \text{ ist unitär} \iff A^*A = I_n \iff \langle a_j, a_k\rangle = \delta_{jk} \ \text{ für alle } j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$$
$$\overset{\dim \mathbb{C}^n = n}{\iff} a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ bilden eine Orthonormalbasis des } \mathbb{C}^n.$$

b) Die beiden gegebenen Vektoren haben Norm 1 und sind orthogonal zueinander. Nach **a)** müssen wir die beiden Vektoren zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$ ergänzen. Dazu bestimmen wir zunächst einen Vektor $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ mit

$$\left\langle z, \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \text{und} \qquad \left\langle z, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0\,.$$

Komponentenweise geschrieben und mit $\sqrt{2}$ bzw. 2 durchmultipliziert bedeutet das

$$-iz_1 - z_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad z_1 + iz_2 + (1+i)z_3 = 0\,.$$

Die erste Gleichung können wir mit $z_1 = 1$ und $z_2 = -i$ erfüllen. Die zweite Gleichung liefert dann $2 + (1+i)z_3 = 0$, also $z_3 = -2/(1+i) = -1+i$. Den so gefundenen Vektor

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}$$

müssen wir noch normieren, also durch seine Norm $\|z\| = \sqrt{1^2 + (-i)i + (-1+i)(-1-i)} = \sqrt{1+1+2} = 2$ teilen. Wir ergänzen daher den Vektor

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Der zu ergänzende Vektor ist nicht eindeutig bestimmt, man kann ihn mit beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$, für die $|c| = 1$ gilt, multiplizieren.

c) Im folgenden sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix.

i) Sei $z \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt

$$\|Az\|^2 = \langle Az, Az\rangle = \langle \underbrace{A^*A}_{=I_n} z, z\rangle = \langle z, z\rangle = \|z\|^2.$$

Alternativ: $\langle Az, Az\rangle = (\overline{Az})^T Az = (\overline{A}\,\overline{z})^T Az = \overline{z}^T \overline{A}^T Az = \overline{z}^T (\underbrace{A^*A}_{=I_n}) z = \overline{z}^T z = \langle z, z\rangle.$

ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass es einen Vektor $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit $Az = \lambda z$. [Ein solches λ heißt *Eigenwert von* A und z ein *zugehöriger Eigenvektor*]. Mit Hilfe von **i)** erhält man dann

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = \langle Az, Az\rangle = \langle \lambda z, \lambda z\rangle = \lambda\langle z, \lambda z\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle z, z\rangle = |\lambda|^2\langle z, z\rangle = |\lambda|^2\|z\|^2.$$

Division mit $\|z\|^2 \neq 0$ (wegen $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$) ergibt $|\lambda|^2 = 1$, also $|\lambda| = 1$.