Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Sommersemester 2012
16.05.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

5. Übungsblatt

Aufgabe 21

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte? Welche Matrix ist diagonalisierbar? Ermitteln Sie, falls möglich, reguläre Matrizen S_A bzw. S_B so, dass $S_A^{-1}AS_A$ bzw. $S_B^{-1}BS_B$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 22

Gegeben sei das System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u' &= 8u - 6v, \\ v' &= 9u - 7v. \end{aligned}$$

Stellen Sie dieses mit Hilfe einer geeigneten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in der Form

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1}$$

dar. Begründen Sie, dass A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, und definieren Sie Funktionen $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ so, dass (1) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

ist. Da D Diagonalgestalt besitzt, erhält man zwei entkoppelte Gleichungen, aus denen sich $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ berechnen lassen. Bestimmen Sie $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ und damit auch die Lösungen von (1).

Aufgabe 23

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie A auf Diagonalisierbarkeit. Geben Sie, falls möglich, eine orthogonale Matrix S und ihre Inverse S^{-1} so an, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

b) Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{R}^3$, die das lineare Gleichungssystem $Ax = 2x$ lösen.

c) Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 24

Bestimmen Sie alle Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 25

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und geben Sie eine reguläre Matrix S so an, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Ist es möglich, die Matrix S orthogonal zu wählen?

Aufgabe 26

a) Finden Sie Matrizen mit den folgenden Eigenschaften:

- **i)** $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und A hat nur den Eigenwert 5.
- **ii)** $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und B hat paarweise verschiedene reelle Eigenwerte.
- **iii)** $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ und $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda$ ist das charakteristische Polynom von C.

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass dann $\lambda^2 + 5$ ein Eigenwert von $A^2 + 5I_n$ ist.

c) Ist die folgende Aussage wahr?
Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt mindestens einen reellen Eigenwert.

ACHTUNG: Terminänderung
Auf vielfachen Wunsch wird die Übung am Freitag, den 18.05.12, verschoben. Ausweichtermin ist **Montag, der 21.05.12, von 08:00 bis 09:30 Uhr im Hörsaal Neue Chemie**. Am 18.05.12 findet *keine* Übung statt.