

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik inkl.
Komplexe Analysis und Integraltransformationen
8. Übungsblatt

Aufgabe 37

Skizzieren Sie folgende Kurven und berechnen Sie deren Längen (bzgl. der Euklid-Norm $\|\cdot\|_2$).

- a) $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, |t|)$
- b) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$
- c) $z: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto z(\varphi) := \varphi e^{i\varphi}$

Hinweis zur Berechnung der Längen: **b)** Schreiben Sie $\cos t = \cos(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t)$ und verwenden Sie das Additionstheorem für Cosinus. **c)** Es gilt $\int \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{Arsinh} \varphi + \varphi \sqrt{1 + \varphi^2})$.

Aufgabe 38

Die Kurve $\gamma: [-\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin t \\ t \\ \sqrt{1 - t^2} \end{pmatrix}, \quad t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Ist γ eine reguläre Kurve? Berechnen Sie die Länge (bzgl. der Euklid-Norm $\|\cdot\|_2$) der Kurve γ und bestimmen Sie die Darstellung von γ bezüglich der Bogenlänge.

Aufgabe 39

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen.

- a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$
- b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)e^{xy}$
- c) $f: \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xe^y/z$

Berechnen Sie auch die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen. Ermitteln Sie zusätzlich in **b)** die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}$ von f in Richtung $v := (1, 1)$.

Aufgabe 40

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

- a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (xy^2z^3e^{xy^2z^3}, x^2e^y + \sin x)$
- b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (ye^x + x \sinh y, y^4 + 3x^2 \sin y, 4y - x^3)$
- c) $f: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3, f(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta)$
- d) $f: \mathbb{R} \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(w, x, y, z) = x^y$

Berechnen Sie in **c)** zusätzlich die *Funktionaldeterminante* $\det(Df)(r, \varphi, \theta)$ für jeden Punkt $(r, \varphi, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$.

Aufgabe 41

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.
- b) Berechnen Sie in jedem Punkt die partiellen Ableitungen von f .
- c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$ stetig?
- d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ für jede Richtung v , für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \langle \text{grad } f(0, 0), v \rangle$?
- e) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort Df .

Aufgabe 42

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar und für die Richtungen $u := (1, 2)$ und $v := (-1, 1)$ gelte

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = -1 \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 2.$$

Bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial w}(x_0, y_0)$ für $w := (1, 1)$. Geben Sie die Richtung $h \in \mathbb{R}^2$ mit $\|h\|_2 = 1$ an, für die $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0, y_0)$ maximal wird.

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am Montag, den 17.09.2012, statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, 20.07.2012.**
Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage
www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etec2012s/.