Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Sommersemester 2012
21.06.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

10. Übungsblatt

Aufgabe 50

a) Die Kurve $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f\, ds \qquad \text{für} \quad f(x,y,z) := 2z - \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

b) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

i) $\vec{v}(x,y) = (e^x, xy)\,, \qquad \gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$

ii) $\vec{v}(x,y,z) = (y,-z,x)\,, \qquad \gamma\colon [0,\ln 2] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\sinh t, \cosh t, \sinh t)$

iii) $\vec{v}(x,y) = (\sin x, x^2+y^2)\,, \qquad \gamma\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{cases} (t,0)\,, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (1,t-1)\,, & 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$

c) Ein Massenpunkt bewege sich unter der Wirkung des Kraftfeldes $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2xy, x^2+y^2)$ auf dem durch die Punkte $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ und $(-1,2)$ (in dieser Reihenfolge) gebildeten Polygonzug γ. Welche Arbeit $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ wird hierbei verrichtet?

Aufgabe 51

Die Vektorfelder $\vec{v}, \vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3yx \\ 2y + z^3x^2 \\ y^2 + 3z^2yx^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w}(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Potentialfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ und $\int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s}$, wobei die Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ durch $\gamma(t) = (1-t, t, 0)$ gegeben ist.

Aufgabe 52

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\, d(x,y)$ **ii)** $\displaystyle\iint_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\, d(x,y)$

b) Skizzieren Sie jeweils die Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ und berechnen Sie den Flächeninhalt $\displaystyle\iint_B d(x,y)$.

i) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{1}{4}x^2 - 1 < y < 2 - x\right\}$

ii) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0,\ y^2 < x < 4 - y^2\right\}$

c) Skizzieren Sie die Integrationsbereiche der folgenden Integrale, vertauschen Sie jeweils die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie den Wert der Integrale.

i) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\, dx\right) dy$ **ii)** $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^{y^2+1} x^2 y\, dx\right) dy$

Aufgabe 53

Es sei γ eine Kurve in $\mathbb{R}^2$, deren Träger der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ ist. Das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2y - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\displaystyle\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ zunächst direkt und anschließend mit dem Gaußschen Integralsatz.

Aufgabe 54

Berechnen Sie unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\iint\limits_G (x^2 + y)\, d(x,y)\,, \qquad \text{wobei } G := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\big\}\,.$$

Aufgabe 55

a) Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \leqslant x \leqslant 2\,,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\big\}\,.$$

b) Die beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ sei durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + 2z = 1$ begrenzt. Berechnen Sie das Integral $\iiint\limits_B \sin z\, d(x,y,z)$.

Aufgabe 56

a) Sei $B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|(x,y)\|_2 \in [1,8],\ |y| \leqslant x\big\}$. Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_B \frac{y}{x}\, d(x,y)$.

b) Berechnen Sie für die Menge $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leqslant z \leqslant 1\,, x^2 + y^2 \leqslant (1-z)^2\}$ das Integral

$$\iiint\limits_B (x^2 + y^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, d(x,y,z)\,.$$

c) Sei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|(x,y,z)\|_2 \leqslant 2\}$. Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\varrho(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} & \text{für } 0 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 1\,, \\ 0 & \text{für } 1 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 2\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse

$$\iiint\limits_B \varrho(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$$

ZUSÄTZLICHE VORLESUNG:
Am Montag, den 25. Juni, findet von 08:00 - 09:30 Uhr im Hörsaal Neue Chemie eine Vorlesung statt als Ersatz für die wegen Fronleichnam ausgefallene Veranstaltung.

HM II - Übungsklausur am Samstag, den 07.07.2012, von 09:00 - 11:00 Uhr:

Zur Teilnahme an der HM II - Übungsklausur ist keine Anmeldung erforderlich.

Hörsaal: Gerthsen (Geb. 30.21)

Zugelassene Hilfsmittel zur HM II - Übungsklausur:

Ausschließlich zwei handbeschriebene DIN A4 - Blätter (insgesamt vier Seiten).

Weitere Informationen zur HM II - Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.