

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik inkl.
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

11. Übungsblatt (HM-Stoff)

Aufgabe 57

Für das elektrostatische Potential $U(\vec{a})$ einer mit der Dichte ϱ homogen geladenen Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ im Punkt $\vec{a} \notin \mathcal{F}$ gilt nach Coulomb

$$U(\vec{a}) = \varrho \iint_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|_2} d\sigma.$$

Bestimmen Sie $U(\vec{a})$ in $\vec{a} = (0, 0, 1)$, falls \mathcal{F} der durch $0 \leq z \leq 1$ beschränkte Teil des Kegelmantels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}$ ist.

Hinweis: Es gilt $\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2 - 2r + 1}} dr = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} - 1)$.

Aufgabe 58

Sei $G = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 3\}$ und γ eine positiv orientierte Parametrisierung von ∂G . Für $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ definiere $\vec{g}(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$ und betrachte die Fläche

$$\mathcal{F} = \{\vec{g}(u, v) : (u, v) \in G\},$$

deren Rand $\partial \mathcal{F} = \vec{g}(\partial G)$ durch $\vec{g} \circ \gamma$ parametrisiert ist. Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z - 5y \\ 9x - 3z \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\oint_{\partial \mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unter Verwendung des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 59

Die Oberfläche von $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ wird mit \mathcal{F} bezeichnet und es sei

$$\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} d\sigma,$$

wobei \vec{N} der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Zylinders Z weist, auf zwei verschiedene Arten, nämlich

- mittels der Definition des Oberflächenintegrals;
- unter Verwendung des Divergenzsatzes (bzw. des Integralsatzes von Gauß).

Aufgabe 60

Gegeben seien der Kegel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

und das Vektorfeld

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ y \\ z + 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes \vec{f} durch die Oberfläche des Kegels K nach außen.

ZUSÄTZLICHE ÜBUNG:

Am Freitag, den 29.06.2012, findet von 09:45 bis 11:15 Uhr im Audimax (Geb. 30.95) eine zusätzliche Übung (zum HM-Stoff) statt.

HM II - Übungsklausur am Samstag, den 07.07.2012, von 09:00 - 11:00 Uhr:

Zur Teilnahme an der HM II - Übungsklausur ist keine Anmeldung erforderlich.

Hörsaal: Gerthsen (Geb. 30.21)

Zugelassene Hilfsmittel zur HM II - Übungsklausur:

Ausschließlich zwei handbeschriebene DIN A4 - Blätter (insgesamt vier Seiten).

Weitere Informationen zur HM II - Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am Montag, den 17.09.2012, statt.

Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, 20.07.2012.**

Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etec2012s/.