

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik inkl.
 Komplexe Analysis und Integraltransformationen
 Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt (KAI-Stoff)**

Aufgabe 61

- a) Wir zeigen zuerst: Ist $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist die Funktion $f_n(t) := t^n$ von exponentieller Ordnung ε für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Stellen wir die Exponentialfunktion als Potenzreihe dar, erhalten wir

$$e^{\varepsilon t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon t)^k}{k!} = 1 + \varepsilon t + \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\varepsilon t)^n}{n!} + \dots \geq \frac{(\varepsilon t)^n}{n!}$$

für alle $t \geq 0$. Folglich ergibt sich mit $M := \frac{n!}{\varepsilon^n}$ die Abschätzung

$$t^n \leq M e^{\varepsilon t}$$

für alle $t \geq 0$. Also ist die Funktion f_n von exponentieller Ordnung ε .

Gegeben seien nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $s_0 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s_0) > 0$. Wir wollen die Existenz von $\mathcal{L}\{f_n\}(s_0)$ nachweisen.

Wie eben gesehen, ist $f_n(t) = t^n$ von exponentieller Ordnung ε für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$. Insbesondere ist dann f_n von exponentieller Ordnung $\varepsilon_0 := \operatorname{Re}(s_0)/2$. Nach Satz 8.4 konvergiert daher das Integral $\int_0^\infty e^{-st} f_n(t) dt$ (sogar absolut) für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \varepsilon_0$. Aufgrund von $\operatorname{Re}(s_0) > \varepsilon$ existiert demnach $\mathcal{L}\{f_n\}(s_0)$.

- b) Die Behauptung zeigen wir durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$ gilt nach Beispiel 8.2 (a)

$$\mathcal{L}\{f_0\}(s) = \mathcal{L}\{t^0\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s} = \frac{0!}{s^{0+1}}.$$

IS: Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte: $\mathcal{L}\{f_n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$ (IV). Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_{n+1}\}(s) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^{n+1} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} t^{n+1} \right]_{t=0}^b + \frac{n+1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^n dt \\ &= 0 + \frac{n+1}{s} \mathcal{L}\{f_n\}(s) \stackrel{\text{(IV)}}{=} \frac{n+1}{s} \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{(n+1)+1}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 62

Sei $a > 0$. Da f von exponentieller Ordnung γ ist, gibt es eine Konstante $M > 0$ so, dass

$$|f(x)| \leq M e^{\gamma x}$$

für alle $x \geq 0$ gilt. Setzen wir in diese Ungleichung at für x ein, dann erhalten wir

$$|f(at)| \leq M e^{(\gamma a)t}$$

für alle $t \geq 0$. Damit ist die Funktion $t \mapsto f(at)$ von exponentieller Ordnung γa , und deshalb konvergiert $\mathcal{L}\{f(at)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \gamma a$. Mit Hilfe der Substitution $\tau = at$, $d\tau = a dt$ erkennen wir

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(at) dt = \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{ab} e^{-(s/a)\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} \mathcal{L}\{f\}\left(\frac{s}{a}\right).$$

Aufgabe 63

- a) Mit $g(t) := t^2 + bt + c$ erhält man nach Aufgabe 61 aufgrund der Linearität von $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \mathcal{L}\{t^2\}(s) + b\mathcal{L}\{t\}(s) + c\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0,$$

und wegen $f(t) = e^{at}g(t)$ gilt dann nach der Dämpfungsregel

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s-a) = \frac{2}{(s-a)^3} + \frac{b}{(s-a)^2} + \frac{c}{s-a} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > a.$$

- b) Wir benutzen die Darstellung $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$. Nach der Dämpfungsregel ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\}(s) \right) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}\{\sigma\}(s-i\omega) + \mathcal{L}\{\sigma\}(s+i\omega) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{1}{2} \frac{(s+i\omega) + (s-i\omega)}{s^2 - i^2\omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: a) Mit $\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$ erhält man $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ für $\operatorname{Re}(s) > 0$.

b) Alternativ könnte man $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s)$ im Fall $\omega > 0$ auch mit $\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$ und dem Skalierungsergebnis aus Aufgabe 62 berechnen: Hiernach gilt nämlich für jedes $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\{\cos(t)\} \left(\frac{s}{\omega} \right) = \frac{1}{\omega} \frac{s/\omega}{(s/\omega)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

- c) Es ist $\sinh(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$. Da die Laplacetransformation linear ist, bekommen wir nach der Dämpfungsregel für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > |\omega|$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\}(s) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}\{e^{\omega t}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-\omega t}\}(s) \right) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}\{\sigma\}(s-\omega) - \mathcal{L}\{\sigma\}(s+\omega) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega} \right) = \frac{1}{2} \frac{(s+\omega) - (s-\omega)}{s^2 - \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Wir mussten hier $\operatorname{Re}(s) > |\omega|$ fordern, damit sowohl $\mathcal{L}\{e^{\omega t}\}(s)$ als auch $\mathcal{L}\{e^{-\omega t}\}(s)$ existieren. Bekanntlich liegt Konvergenz von $\mathcal{L}\{e^{\omega t}\}(s)$ nur für $\operatorname{Re}(s) > \omega$ vor, entsprechend konvergiert $\mathcal{L}\{e^{-\omega t}\}(s)$ nur für $\operatorname{Re}(s) > -\omega$. Beide Bedingungen an s sind für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > |\omega|$ erfüllt.

- d) Wir drücken die Funktion f zunächst mit Hilfe der Exponentialfunktion aus: Es ist

$$f(t) = \sinh^2(\omega t) = \left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2\omega t} - 2 + e^{-2\omega t}}{4}.$$

Damit folgt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 2|\omega|$ (analoge Begründung wie zuvor im c)-Teil)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\}(s) &= \frac{1}{4} \left(\mathcal{L}\{e^{2\omega t}\}(s) - \mathcal{L}\{2\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-2\omega t}\}(s) \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s-2\omega} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2\omega} \right) \\ &= \frac{s}{2(s^2 - 4\omega^2)} - \frac{1}{2s} = \frac{2\omega^2}{s(s^2 - 4\omega^2)}. \end{aligned}$$

- e) Für $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$ gilt nach der Dämpfungsregel und der Bemerkung a) im b)-Teil

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{\sin(bt)\}(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}.$$

- f) Für jedes $t \geq 0$ gilt nach dem Additionstheorem des Sinus

$$f(t) = \sin(\omega t) \cos \varphi + \cos(\omega t) \sin \varphi.$$

Hieraus folgt mit Hilfe des b)- und e)-Teils für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \cos \varphi \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) + \sin \varphi \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = \cos \varphi \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin \varphi \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

- g) Für $\operatorname{Re}(s) > 0$ gilt $\mathcal{L}\{\sin(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Mit $g(t) := e^t \sin(t)$ liefert die Dämpfungsregel

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \mathcal{L}\{\sin(t)\}(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2+1} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Wegen $f(t) = (\tau_1 g)(t) = \begin{cases} e^{t-1} \sin(t-1) & t \geq 1 \\ 0 & t \in [0, 1) \end{cases}$ haben wir nach der Verschiebungsregel

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = e^{-1 \cdot s} \mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{e^{-s}}{(s-1)^2+1} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

- h) Nach Definition ist

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st} (2-t) dt.$$

Diese Integrale sind für alle $s \in \mathbb{C}$ (absolut) konvergent. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Für $s = 0$ ist $\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2-t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Im Fall $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ liefert partielle Integration

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\}(s) &= \int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st} (2-t) dt \\ &= \left(\frac{e^{-st}}{-s} t \right) \Big|_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{e^{-st}}{-s} dt + \left(\frac{e^{-st}}{-s} (2-t) \right) \Big|_{t=1}^2 - \int_1^2 \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-s} - \left(\frac{1}{s^2} e^{-st} \right) \Big|_{t=0}^1 + \frac{1}{s} e^{-s} + \left(\frac{1}{s^2} e^{-st} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{s^2} (-e^{-s} + 1) + \frac{1}{s^2} (e^{-2s} - e^{-s}) = \frac{1}{s^2} (e^{-2s} - 2e^{-s} + 1) = \frac{1}{s^2} (e^{-s} - 1)^2. \end{aligned}$$

Alternativ: Wie in der Übung am 29.06. nachgerechnet, ist $f = g * g$ mit $g(t) := \begin{cases} 1 & t \in [0, 1] \\ 0 & t > 1 \end{cases}$.

Für jedes $s \in \mathbb{C}$ gilt nach Beispiel 8.2 (c) der Vorlesung $\mathcal{L}\{g\}(s) = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ \frac{1-e^{-s}}{s} & s \neq 0 \end{cases}$, so dass

man mit der Faltungsregel $\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g * g\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s) \mathcal{L}\{g\}(s) = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} & s \neq 0 \end{cases}$ erhält.

Aufgabe 64

- a) Ist $f(t) := e^{at}$, $t \geq 0$, gesetzt, so ergibt sich nach Beispiel 8.2 (b): $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$.
- b) Wir definieren $g(t) := e^{-2t}$, $t \geq 0$. Dann gilt $\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s+2}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > -2$.
Ist $f(t) := (\tau_3 g)(t) = \begin{cases} e^{-2(t-3)} & t \geq 3 \\ 0 & t \in [0, 3) \end{cases}$ gesetzt, dann gilt nach der Verschiebungsregel

$$\frac{e^{-3s}}{s+2} = e^{-3s} \mathcal{L}\{g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s).$$

- c) Aufgrund von $\mathcal{L}\{\cos(2t)\}(s) = \frac{s}{s^2+2^2}$ und $\mathcal{L}\{\sin(2t)\}(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$ (für $\operatorname{Re} s > 0$) bekommen wir mit Hilfe der Linearität von $\mathcal{L}$ und der Dämpfungsregel für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > -1$

$$\begin{aligned} \frac{s+3}{(s+1)^2+4} &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{2}{(s+1)^2+4} = \mathcal{L}\{\cos(2t)\}(s+1) + \mathcal{L}\{\sin(2t)\}(s+1) \\ &= \mathcal{L}\{\cos(2t) + \sin(2t)\}(s+1) = \mathcal{L}\{e^{-t}(\cos(2t) + \sin(2t))\}(s). \end{aligned}$$

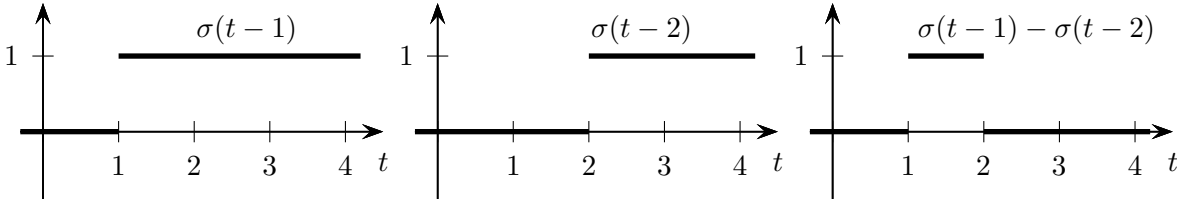
Demnach gilt $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2+4}$ für $f(t) := e^{-t}(\cos(2t) + \sin(2t))$, $t \geq 0$.

Aufgabe 65

Dem Schaubild kann man sofort

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } t \in [1, 2), \\ 1 & \text{für } t \in [2, 3), \\ 3 & \text{für } t \in [3, 4), \\ -1 & \text{für } t \in [4, 6), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ ablesen. Diese Fallunterscheidung wollen wir mit Hilfe des Einheitssprungs σ ausdrücken. Wie man sich beispielsweise anhand der Graphen



überlegt, gilt

$$\sigma(t-1) - \sigma(t-2) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [1, 2), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsprechendes erhält man für die anderen Fälle. Damit kann man die Funktion f mit Hilfe des Einheitssprungs σ in einem geschlossenen Ausdruck angeben

$$\begin{aligned} f(t) &= 2(\sigma(t-1) - \sigma(t-2)) + 1(\sigma(t-2) - \sigma(t-3)) + 3(\sigma(t-3) - \sigma(t-4)) \\ &\quad - (\sigma(t-4) - \sigma(t-6)) \\ &= 2\sigma(t-1) - \sigma(t-2) + 2\sigma(t-3) - 4\sigma(t-4) + \sigma(t-6), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nach der Verschiebungsregel gilt für jedes $a \geq 0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathcal{L}\{\sigma(t-a)\}(s) = \mathcal{L}\{\tau_a \sigma\}(s) = e^{-as} \mathcal{L}\{\sigma\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Hiermit ergibt sich aufgrund der Linearität von $\mathcal{L}$ für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s} (2e^{-s} - e^{-2s} + 2e^{-3s} - 4e^{-4s} + e^{-6s}).$$

Aufgabe 66

- a) *Erinnerung an die geometrische Reihe:* Sei $\omega \in \mathbb{C}$ mit $|\omega| < 1$. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} \omega^k$ absolut konvergent, und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \omega^k = \frac{1}{1-\omega}$.

Es seien $T > 0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$. Setze $A := \int_0^T e^{-st} f(t) dt$ sowie $\omega := e^{-sT}$.

Zu zeigen ist also $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1-\omega} A$.

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt aufgrund der T -Periodizität von f

$$\begin{aligned} \int_0^{(N+1)T} e^{-st} f(t) dt &= \sum_{k=0}^N \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t) dt \stackrel{r:=t-kT}{=} \sum_{k=0}^N \int_0^T e^{-s(r+kT)} \underbrace{f(r+kT)}_{=f(r)} dr \\ &= \sum_{k=0}^N e^{-skT} \int_0^T e^{-sr} f(r) dr = \sum_{k=0}^N \omega^k A = A \sum_{k=0}^N \omega^k. \end{aligned}$$

Für $N \rightarrow \infty$ ergibt sich wegen $|\omega| = e^{-\operatorname{Re}(s)T} < 1$

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = A \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k = \frac{A}{1-\omega} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

- b) Sei $a > 0$. Da die Funktion f (stückweise) stetig und periodisch mit der Periode $T = 2a$ ist, lässt sich $\mathcal{L}\{f\}$ nach Teil a) durch

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} \int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, \quad (1)$$

berechnen. Um das Integral $\int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt$ zu bestimmen, definieren wir

$$g(t) := \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt gemäß Aufgabe 63 h): $\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s^2}(e^{-s} - 1)^2$ für $\operatorname{Re}(s) > 0$. Ist

$$g_a(t) := g(t/a) = \begin{cases} t/a & \text{für } 0 \leq t < a \\ 2 - t/a & \text{für } a \leq t < 2a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

gesetzt, so folgt mit dem Skalierungsergebnis aus Aufgabe 62

$$\mathcal{L}\{g_a\}(s) = \frac{1}{1/a} \mathcal{L}\{g\}\left(\frac{s}{1/a}\right) = a \mathcal{L}\{g\}(as) = \frac{1}{as^2}(e^{-as} - 1)^2, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Nun gilt aber $f(t) = g_a(t)$ für alle $t \in [0, 2a)$; da ferner $g_a(t) = 0$ für alle $t \geq 2a$ ist, ergibt sich für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}\{g_a\}(s) = \frac{1}{as^2}(e^{-as} - 1)^2.$$

[Natürlich könnte man $\int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt$ auch direkt mittels partieller Integration berechnen.] Mit (1) folgt hieraus für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} \cdot \frac{1}{as^2}(e^{-as} - 1)^2 = \frac{1}{as^2} \cdot \frac{(1 - e^{-as})^2}{(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} = \frac{1}{as^2} \cdot \frac{1 - e^{-as}}{1 + e^{-as}}.$$

Aufgabe 67

Um eine Funktion $y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$y(t) = t^3 + \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad (*)$$

anzugeben, schreiben wir die rechte Seite mit Hilfe der Faltung

$$y(t) = t^3 + (y * \sin)(t)$$

und wenden die Faltungsregel an. Für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\operatorname{Re}(s)$ gilt

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{t^3\}(s) + \mathcal{L}\{y * \sin\}(s) = \mathcal{L}\{t^3\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) \mathcal{L}\{\sin\}(s).$$

Hieraus folgt wegen $\mathcal{L}\{t^3\}(s) = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$ und $\mathcal{L}\{\sin\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{6}{s^4} + \mathcal{L}\{y\}(s) \frac{1}{s^2+1} \iff \mathcal{L}\{y\}(s) \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{6}{s^4}$$

bzw.

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{s^2+1}{s^2} \cdot \frac{6}{s^4} = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^6}.$$

Schließlich erhalten wir mit $\mathcal{L}\{t^5\}(s) = \frac{5!}{s^6}$

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{t^3\}(s) + \frac{6}{5!} \mathcal{L}\{t^5\}(s) = \mathcal{L}\{t^3 + t^5/20\}(s),$$

d.h. $y(t) = t^3 + \frac{1}{20}t^5$, $t \geq 0$, löst die gegebene Gleichung von (*).