

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik inkl.
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

13. Übungsblatt

Aufgabe 74

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wo sind sie holomorph? Bestimmen Sie gegebenenfalls F' .

- a) $F(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$
- b) $F(x + iy) = \sin x \sin y - i \cos x \cos y \quad (x, y \in \mathbb{R})$
- c) $F(z) = z \operatorname{Re} z$

Aufgabe 75

Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie jeweils eine stückweise stetige, exponentiell beschränkte Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

- a) $f(t) \circ \bullet \ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right)$ für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > |a|$;
- b) $f(t) \circ \bullet \ln\left(1 - \frac{a^2}{s^2}\right)$ für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > |a|$.

Aufgabe 76

Berechnen Sie jeweils für die Funktion F und die Kurve γ das Kurvenintegral $\int_{\gamma} F(z) dz$.

- a) $F(z) = \bar{z}z^2$, $\gamma(t) = e^{i(\pi-t)}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
- b) $F(z) = |z|^2$, γ sei der positiv orientierte Rand von $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0, 1)\}$

Aufgabe 77

Berechnen Sie den Wert der folgenden Kurvenintegrale.

- a) $\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2 + 1} dz$
- b) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz$
- c) $\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z - \pi)^3} dz$
- d) $\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i \cos z} \sin(z^4 + 1) - z}{(z - 7)^{42}} dz$

Der Integrationsweg soll dabei jeweils die positiv orientierte Kreislinie sein.

Aufgabe 78

Die Funktion F ist gegeben durch

$$F(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}.$$

Bestimmen Sie die Laurententwicklung von F

- a) im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$.
- b) um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, die im Punkt $1 + 3i$ konvergiert.

Aufgabe 79

Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten von F sowie die Residuen in diesen Punkten.

- a) $F(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$
- b) $F(z) = \frac{ze^{az}}{(z-1)^2} \quad (a \in \mathbb{C} \text{ fest})$
- c) $F(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$
- d) $F(z) = ze^{\frac{1}{1-z}}$

Aufgabe 80

Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale mit Hilfe des Residuensatzes.

- a) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$
- b) $\int_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$
- c) $\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1} dz$
- d) $\int_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) dz$
- e) $\int_{\partial G} \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)} dz$, wobei $G := \{z \in \mathbb{C} : -3 < \operatorname{Re} z < 2, -2 < \operatorname{Im} z < 3\}$

Der Integrationsweg soll dabei jeweils die positiv orientierte Kreislinie bzw. der positiv orientierte Rand ∂G sein.

Aufgabe 81

Untersuchen Sie, ob sich die durch $F(z) = e^{\sin z}$ definierte Funktion $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt und für welche z diese gegebenenfalls konvergiert. Berechnen Sie dann

$$\int_{|\zeta|=1/2} \zeta e^{\sin(1/\zeta)} d\zeta.$$

Sprechstunde der Tutoren:

Am Montag, den 10.09.2012, findet von 14:00 bis 15:30 Uhr im Seminarraum 1C-04 (Allianz-Gebäude) eine Sprechstunde der Tutoren zur Beantwortung von Fragen zu Themen aus der HM II und KAI statt.

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am Montag, den 17.09.2012, statt.

Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, 20.07.2012.**

Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etec2012s/.