

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik inkl.
 Komplexe Analysis und Integraltransformationen
 Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt**

Aufgabe 74

- a) Da die Exponentialfunktion $\exp$ und $z \mapsto -z^{-4}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph sind, ist F als Verkettung holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph, also auch komplex differenzierbar. (Dort sind insbesondere die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRD) erfüllt.) Nach der Kettenregel gilt für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$F'(z) = e^{-1/z^4} (4z^{-5}) = \frac{4e^{-1/z^4}}{z^5}.$$

Nun zum Punkt $z_0 = 0$: Die Funktion F ist in 0 nicht einmal stetig, denn $re^{i\pi/4} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$, aber

$$F(re^{i\pi/4}) = e^{-e^{-i\pi}/r^4} = e^{1/r^4} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty.$$

Folglich ist F in $z_0 = 0$ nicht komplex differenzierbar und damit erst recht nicht holomorph.

- b) Die Funktionen $u(x, y) := \sin x \sin y$ und $v(x, y) := -\cos x \cos y$ sind offensichtlich auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \cos x \sin y, & u_y(x, y) &= \sin x \cos y, \\ v_x(x, y) &= \sin x \cos y, & v_y(x, y) &= \cos x \sin y. \end{aligned}$$

Wir prüfen die CRD nach: $u_x = v_y$ ist immer erfüllt. $u_y = -v_x$ gilt genau dann, wenn $\sin x \cos y = 0$ ist, also wenn $x = k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ oder $y = (m + \frac{1}{2})\pi$ mit einem $m \in \mathbb{Z}$. Genau in diesen Punkten ist F komplex differenzierbar. Da die Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } \operatorname{Im} z = (m + \frac{1}{2})\pi \text{ für ein } m \in \mathbb{Z}\}$$

nicht offen ist, liegt nirgends Holomorphie vor. Für $z = x + iy \in M$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$F'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = \cos x \sin y + i \underbrace{\sin x \cos y}_{=0, \text{ da } z \in M} = \cos x \sin y.$$

- c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $F(x + iy) = (x + iy)x = x^2 + ixy =: u(x, y) + iv(x, y)$. Die Funktionen $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar mit

$$u_x(x, y) = 2x, \quad u_y(x, y) = 0, \quad v_x(x, y) = y, \quad v_y(x, y) = x.$$

Wegen

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= v_y(x, y) &\iff 2x &= x &\iff x = 0, \\ u_y(x, y) &= -v_x(x, y) &\iff 0 &= -y &\iff y = 0 \end{aligned}$$

sind die CRD nur für $(x, y) = (0, 0)$ erfüllt. Deshalb liegt nur in $z = 0$ komplexe Differenzierbarkeit von F vor. Da $\{0\} \subset \mathbb{C}$ nicht offen ist, ist F nirgendwo holomorph.

Aufgabe 75

Wir verwenden das folgende Resultat aus der Vorlesung: Sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion, die von exponentieller Ordnung γ ist. Gilt $f(t) \circ \bullet F(s)$, so ist F in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \gamma\}$ holomorph mit $F'(s) = \int_0^\infty -te^{-st} f(t) dt$, d.h.

$$-tf(t) \circ \bullet F'(s).$$

Deshalb ist $f(t) = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\{F'\}(t)$ für $t > 0$. Der Funktionswert von f in 0 ist irrelevant und kann beliebig definiert werden, etwa $f(0) := 0$.

- a) Für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > |a|$ sei $F(s) := \ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right) = \ln(s+a) - \ln(s-a)$. Dann ist

$$F'(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} \bullet \circ e^{-at} - e^{at}.$$

Damit erhalten wir für $t > 0$

$$f(t) = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\{F'\}(t) = \frac{1}{t} (e^{at} - e^{-at}) = \frac{2 \sinh(at)}{t}.$$

- b) Ist $F(s) := \ln\left(1 - \frac{a^2}{s^2}\right) = \ln\left((1 - \frac{a}{s})(1 + \frac{a}{s})\right) = \ln(1 - \frac{a}{s}) + \ln(1 + \frac{a}{s})$ für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > |a|$ gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{a}{s^2 - as} - \frac{a}{s^2 + as} = \frac{a}{s(s-a)} - \frac{a}{s(s+a)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a} \\ &= -\frac{2}{s} + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \bullet \circ -2 + e^{at} + e^{-at} = -2 + 2 \cosh(at). \end{aligned}$$

Für $f(t) := 2 \frac{1 - \cosh(at)}{t}$, $t > 0$, und $f(0) := 0$ gilt somit $f(t) \circ \bullet \ln(1 - \frac{a^2}{s^2})$.

Aufgabe 76

- a) Für jedes $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt

$$\gamma'(t) = -ie^{i(\pi-t)} \quad \text{und} \quad F(\gamma(t)) = \overline{e^{i(\pi-t)}} (e^{i(\pi-t)})^2 = e^{-i(\pi-t)} e^{2i(\pi-t)} = e^{i(\pi-t)}.$$

Damit ergibt sich nach Definition des (komplexen) Kurvenintegrals

$$\begin{aligned} \int_\gamma F(z) dz &= \int_0^{\pi/2} F(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{\pi/2} e^{i(\pi-t)} (-ie^{i(\pi-t)}) dt \\ &= -ie^{2\pi i} \int_0^{\pi/2} e^{-2it} dt = -i \left[\frac{e^{-2it}}{-2i} \right]_{t=0}^{\pi/2} = \frac{e^{-i\pi} - e^0}{2} = \frac{-1 - 1}{2} = -1. \end{aligned}$$

- b) Die Kurve γ durchläuft den positiv orientierten Rand des Quadrates mit den Eckpunkten 0, 1, $1+i$ und i , setzt sich also zusammen aus den vier Teilkurven

$$\gamma_1(t) = t, \quad \gamma_2(t) = 1 + it, \quad \gamma_3(t) = 1 - t + i, \quad \gamma_4(t) = i(1 - t),$$

wobei jeweils $t \in [0, 1]$ gilt. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \int_\gamma F(z) dz &= \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} F(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 F(\gamma_k(t)) \gamma'_k(t) dt = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 |\gamma_k(t)|^2 \gamma'_k(t) dt \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+t^2)i dt + \int_0^1 ((1-t)^2 + 1)(-1) dt + \int_0^1 (1-t)^2(-i) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - (1-t)^2 - 1 + i(1+t^2 - (1-t)^2)) dt = \int_0^1 (2t - 2 + 2it) dt = -1 + i. \end{aligned}$$

Aufgabe 77

- a) Wir verwenden bei diesem Integranden die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z + i)(z - i)} = \frac{i/2}{z + i} - \frac{i/2}{z - i}.$$

Da die Punkte $-i$ und i im Inneren der Kreislinie $|z| = 2$ liegen und die Funktion $z \mapsto iz^3/2$ im konvexen Gebiet $G = \mathbb{C}$ holomorph ist, ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2 + 1} dz &= \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z - (-i)} dz - \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z - i} dz \\ &= 2\pi i \frac{iz^3}{2} \Big|_{z=-i} - 2\pi i \frac{iz^3}{2} \Big|_{z=i} = -\pi(-i)^3 + \pi i^3 = -2\pi i. \end{aligned}$$

- b) Der Integrand lässt sich hier wie folgt umschreiben

$$\frac{e^z}{z^2 + 2z} = \frac{e^z}{z(z + 2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z + 2} \right).$$

Der Punkt 0 liegt im Inneren des Integrationsweges, der Punkt -2 dagegen im Äußeren. Folglich liefern die Cauchysche Integralformel und der Cauchysche Integralsatz

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz = \frac{1}{2} \left(\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz - \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z + 2} dz \right) = \frac{1}{2} (2\pi i e^z|_{z=0} - 0) = \pi i.$$

Alternativ: Die Funktion $F(z) := \frac{e^z}{z+2}$ ist holomorph in einer Umgebung des Gebietes, das von der Kreislinie $|z| = 1$ umlaufen wird. Wir können somit direkt die Cauchysche Integralformel anwenden und erhalten

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z+2)} dz = \int_{|z|=1} \frac{F(z)}{z - 0} dz = 2\pi i F(0) = \pi i.$$

- c) Für die durch $F(z) := ze^{iz}$ definierte, in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion gilt

$$F'(z) = e^{iz} + z(ie^{iz}) = (1 + iz)e^{iz}, \quad F''(z) = ie^{iz} + (1 + iz)(ie^{iz}) = (2i - z)e^{iz},$$

und wegen $|\pi| < 4$ erhalten wir mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen

$$\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z - \pi)^3} dz = 2\pi i \frac{F''(\pi)}{2!} = \pi i (2i - \pi)e^{iz}|_{z=\pi} = \pi i (2i - \pi)(-1) = 2\pi + i\pi^2.$$

- d) Die Nullstelle $z_0 = 7$ des Nenners des Integranden liegt außerhalb der Kreislinie $|z - 2| = 3$, denn $|7 - 2| = 5 > 3$. Der Integrand ist also holomorph in dem konvexen und damit einfach zusammenhängenden Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 4\}$, in welchem auch der einfach geschlossene, positiv orientierte Integrationsweg verläuft. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt somit

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i \cos z} \sin(z^4 + 1) - z}{(z - 7)^{42}} dz = 0.$$

Aufgabe 78

Vorüberlegung: Will man

$$\frac{1}{z-a}$$

um den Punkt $z_0 \neq a$ in eine Laurentreihe entwickeln, so gibt es dafür zwei Möglichkeiten. Für $|z - z_0| < |a - z_0|$ hat man die Potenzreihenentwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0) + (z_0-a)} = \frac{1}{z_0-a} \cdot \frac{1}{\frac{z-z_0}{z_0-a} + 1} = \frac{1}{z_0-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{a-z_0}} \\ &= \frac{1}{z_0-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{a-z_0} \right)^k = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(a-z_0)^{k+1}}. \end{aligned} \quad (*)$$

Für $|z - z_0| > |a - z_0|$ dagegen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0) + (z_0-a)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0-a}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a-z_0}{z-z_0}} \\ &= \frac{1}{z-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a-z_0}{z-z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}. \end{aligned} \quad (**)$$

a) Für $1 < |z| < 3$ gilt

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z^{-2}-1} - \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-z^{-2}} - \frac{1}{z-3} \\ &= -\frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-2})^k - \frac{1}{z-3} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+2}} - \frac{1}{z-3} \stackrel{(*)}{=} -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2(k+1)}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}}. \end{aligned}$$

b) Die Partialbruchzerlegung des ersten Summanden von $F(z)$ liefert die Darstellung

$$F(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1} \right) - \frac{1}{z-3}.$$

Die Funktion F hat Polstellen in -1 , in 1 und in 3 . Da die beiden Punkte -1 und 3 von $z_0 = 1$ den Abstand 2 haben, kommen als Gebiete für die Laurententwicklung um $z_0 = 1$ nur die beiden Kreise

$$0 < |z-1| < 2 \quad \text{und} \quad 2 < |z-1| < \infty$$

in Frage. Da der Punkt $1+3i$ im Konvergenzgebiet liegen soll und von z_0 den Abstand $|1+3i-1| = 3$ hat, ist der zweite Kreisring der richtige. Dort gilt gemäß $(**)$

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1-1)^k}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(z-1)^{k+1}}, \quad \frac{1}{z-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3-1)^k}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}}.$$

Also ergibt sich für $|z-1| > 2$

$$F(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(z-1)^{k+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-2)^k - 2^k}{(z-1)^{k+1}}.$$

Aufgabe 79

a) Die Funktion

$$F(z) = \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$$

hat in $z_0 = 1$ eine Polstelle zweiter Ordnung. Deshalb lässt sich das Residuum von F in $z_0 = 1$ bestimmen durch

$$\operatorname{res}(F; 1) = \left(\frac{d}{dz} \left((z-1)^2 F(z) \right) \right) \Big|_{z=1} = \left(\frac{d}{dz} \left((z+1)^2 \right) \right) \Big|_{z=1} = \left(2(z+1) \right) \Big|_{z=1} = 4.$$

Alternativ: Wir können auch die Laurententwicklung von F um $z_0 = 1$ berechnen

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \frac{z^2 + 2z + 1}{(z-1)^2} = \frac{z^2 - 2z + 1}{(z-1)^2} + \frac{4z}{(z-1)^2} \\ &= 1 + \frac{4(z-1+1)}{(z-1)^2} = 1 + \frac{4}{z-1} + \frac{4}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

und hieran $\operatorname{res}(F; 1) = 4$ ablesen.

b) Die Funktion

$$F(z) = \frac{ze^{az}}{(z-1)^2} \quad (a \in \mathbb{C} \text{ fest})$$

besitzt in $z_0 = 1$ einen Pol zweiter Ordnung. Für das Residuum von F in 1 ergibt sich

$$\operatorname{res}(F; 1) = \left(\frac{d}{dz} \left((z-1)^2 F(z) \right) \right) \Big|_{z=1} = \left(\frac{d}{dz} (ze^{az}) \right) \Big|_{z=1} = \left(e^{az} + zae^{az} \right) \Big|_{z=1} = (1+a)e^a.$$

c) Die Funktion $F(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$ hat in $z_0 = 1$ einen Pol der Ordnung 4. Daher ist

$$\operatorname{res}(F; 1) = \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3}{dz^3} \left((z-1)^4 F(z) \right) \right) \Big|_{z=1} = \frac{1}{6} \left(\frac{d^3}{dz^3} e^z \right) \Big|_{z=1} = \frac{1}{6} e^z \Big|_{z=1} = \frac{e}{6}.$$

d) Da F in $z_0 = 1$ eine wesentliche Singularität besitzt, können wir nicht wie zuvor vorgehen. Wir bestimmen stattdessen die zugehörige Laurentreihe um 1 und lesen das Residuum ab

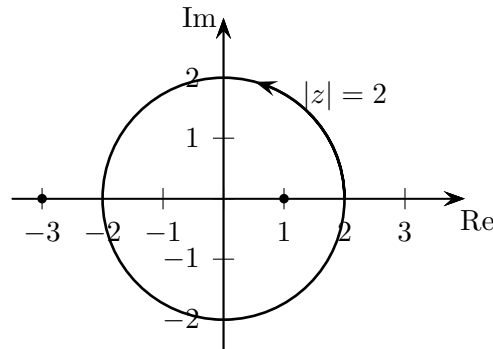
$$\begin{aligned} F(z) &= ze^{\frac{1}{1-z}} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{1-z} \right)^n = ((z-1)+1) \sum_{k=-\infty}^0 \frac{(-1)^k}{(-k)!} (z-1)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^0 \frac{(-1)^k}{(-k)!} (z-1)^{k+1} + \sum_{k=-\infty}^0 \frac{(-1)^k}{(-k)!} (z-1)^k \\ &= \sum_{l=-\infty}^1 \frac{(-1)^{l-1}}{(-(l-1))!} (z-1)^l + \sum_{k=-\infty}^0 \frac{(-1)^k}{(-k)!} (z-1)^k \\ &= (z-1) + \sum_{k=-\infty}^0 \left(\frac{(-1)^{k-1}}{(-(k-1))!} + \frac{(-1)^k}{(-k)!} \right) (z-1)^k, \quad z \neq 1. \end{aligned}$$

Das Residuum von F in 1 ist der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$, also

$$\operatorname{res}(F; 1) = \frac{(-1)^{-2}}{2!} + \frac{-1}{1!} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 80

- a) Der Integrand $F(z) := \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt in 1 eine einfache und in -3 eine doppelte Polstelle und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -3\}$.



Da innerhalb des Integrationsweges $|z| = 2$ nur die Polstelle 1 liegt, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} F(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}(F; 1) = \frac{e\pi i}{8},$$

denn für das Residuum von F in 1 gilt

$$\operatorname{res}(F; 1) = (z-1)F(z) \Big|_{z=1} = \frac{e^z}{(z+3)^2} \Big|_{z=1} = \frac{e}{16}.$$

- b) Nun liegen die beiden Polstellen -3 und 1 innerhalb des Integrationsweges $|z| = 9$. Deswegen gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=9} F(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}(F; 1) + \operatorname{res}(F; -3) \right) = 2\pi i \left(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16} \right) = \frac{(e - 5e^{-3})\pi i}{8},$$

da

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(F; -3) &= \left(\frac{d}{dz} (z+3)^2 F(z) \right) \Big|_{z=-3} = \left(\frac{d}{dz} \frac{e^z}{z-1} \right) \Big|_{z=-3} = \left(\frac{e^z(z-1) - e^z}{(z-1)^2} \right) \Big|_{z=-3} \\ &= \frac{-5e^{-3}}{16}. \end{aligned}$$

- c) Schreibe $F(z) := \frac{z}{e^{iz}-1}$. Der Nenner von $F(z)$ wird genau dann 0, wenn $z = 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Von diesen Punkten liegt nur $z = 0$ im Inneren des Kreises $|z| = 1$. Daher ist

$$\int_{|z|=1} F(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}(F; 0).$$

Nun sieht man z.B. anhand der Darstellung

$$F(z) = \frac{z}{e^{iz}-1} = \frac{z}{\left(1 + iz + \frac{1}{2}(iz)^2 + \dots\right) - 1} = \frac{z}{iz - \frac{1}{2}z^2 + \dots} = \frac{1}{i - \frac{1}{2}z + \dots},$$

dass in $z = 0$ eine hebbare Singularität vorliegt. Deshalb gilt $\operatorname{res}(F; 0) = 0$, so dass das Integral $\int_{|z|=1} F(z) dz$ den Wert 0 hat.

d) Sei $F(z) := e^{\frac{z}{1-z}}$. Hier liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} F(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}(F; 1).$$

Um das Residuum $\operatorname{res}(F; 1)$ zu berechnen, betrachten wir die Laurententwicklung von F um 1

$$F(z) = \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) = \exp\left(-1 + \frac{1}{1-z}\right) = e^{-1} e^{-1/(z-1)} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z-1)^{-k};$$

der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ lautet $-e^{-1}$. Also ist $\operatorname{res}(F; 1) = -e^{-1}$ und damit

$$\int_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) dz = -\frac{2\pi i}{e}.$$

e) Der Integrand $F(z) := \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)}$ besitzt in 1, -2 und $-i$ jeweils einen Pol erster Ordnung und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -2, -i\}$. Da sich alle Polstellen im Inneren von G befinden, ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\int_{\partial G} F(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}(F; 1) + \operatorname{res}(F; -2) + \operatorname{res}(F; -i) \right).$$

Wir berechnen nun die Residuen von F in den (einfachen) Polstellen

$$\operatorname{res}(F; 1) = (z-1)F(z) \Big|_{z=1} = \frac{2z}{(z+2)(z+i)} \Big|_{z=1} = \frac{2}{3(1+i)} = \frac{1}{3}(1-i),$$

$$\operatorname{res}(F; -2) = (z+2)F(z) \Big|_{z=-2} = \frac{2z}{(z-1)(z+i)} \Big|_{z=-2} = \frac{4}{3(-2+i)} = -\frac{4}{15}(2+i),$$

$$\operatorname{res}(F; -i) = (z+i)F(z) \Big|_{z=-i} = \frac{2z}{(z-1)(z+2)} \Big|_{z=-i} = \frac{2i}{(i+1)(-i+2)} = \frac{1}{5}(1+3i).$$

Hiermit ist

$$\int_{\partial G} F(z) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{3}(1-i) - \frac{4}{15}(2+i) + \frac{1}{5}(1+3i) \right) = 0.$$

Aufgabe 81

Als Hintereinanderausführung holomorpher Funktionen ist die Funktion F auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Sie lässt sich also um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Diese Potenzreihe konvergiert auf der größten Kreisscheibe um $z_0 = 0$, auf der F holomorph ist. Hier konvergiert die Potenzreihe also für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Der Integrand $\zeta F(1/\zeta)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und für $\zeta \neq 0$, insbesondere also für $0 < |\zeta| < 1$, gilt nach den obigen Überlegungen

$$\zeta F(1/\zeta) = \zeta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} \zeta^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} \zeta^{1-n}.$$

Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\int_{|\zeta|=1/2} \zeta e^{\sin(1/\zeta)} d\zeta = \int_{|\zeta|=1/2} \zeta F(1/\zeta) d\zeta = 2\pi i \operatorname{res}(\zeta \mapsto \zeta F(1/\zeta); 0),$$

und Ablesen an der Laurentreihe für $\zeta F(1/\zeta)$ ergibt

$$= 2\pi i \frac{F''(0)}{2!}.$$

Wegen $F'(z) = \cos(z)F(z)$, $F''(z) = -\sin(z)F(z) + \cos^2(z)F(z)$ und $F(0) = 1$ ist $F''(0) = 1$. Das Integral ist also gleich

$$2\pi i \frac{1}{2} = \pi i.$$