Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Sommersemester 2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Um zu zeigen, dass $A := \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists C > 0\ \forall j \in \mathbb{N}:\ |x_j| \leqslant C\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist, verwenden wir den Satz in 1.4:

(i) $A \neq \emptyset$ wegen $(0)_{j\in\mathbb{N}} = (0,0,0,\ldots) \in A$. (Nehme z.B. $C = 1$)

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x_j), (y_j) \in A$. Dann gibt es $C, C' > 0$ mit $|x_j| \leqslant C$ und $|y_j| \leqslant C'$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Daher gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$

1) $|x_j + y_j| \leqslant |x_j| + |y_j| \leqslant C + C'\,,$ d.h. $(x_j) + (y_j) \in A\,;$

2) $|\alpha x_j| = |\alpha| \cdot |x_j| \leqslant C|\alpha| \leqslant C|\alpha| + 1 =: \tilde{C}$ (damit $\tilde{C} > 0$), also $\alpha(x_j) \in A\,.$

b) Wie zuvor benutzen wir den Satz in 1.4, um zu begründen, dass $B := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f(0) = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$ ist:

(i) $B \neq \emptyset$, weil z.B. die Nullabbildung $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$ in B liegt.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in B$. Dann gilt

1) $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0\,,$ also $f + g \in B\,;$

2) $(\alpha f)(0) = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot 0 = 0\,,$ also $\alpha f \in B\,.$

c) $C := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, weil z.B. die Funktionen

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \qquad \text{und} \qquad g : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - x$$

in C liegen, ihre Summe wegen $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1$, $x \in [-1,1]$, jedoch nicht.

d) $D := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ ist surjektiv}\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, weil z.B. die Nullfunktion $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$ nicht in D liegt.

(Wäre D ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, so müsste mit $g \in D$ auch die Nullfunktion $0 \cdot g = 0$ in D liegen!)

Aufgabe 2

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

i) Offenbar ist $v_1 = -2v_3$. Daher gilt $v_1 + 0v_2 + 2v_3 = 0$, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

Im allgemeinen erkennt man nicht sofort, ob gegebene Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Um die Vektoren v_1, v_2, v_3 auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, können wir

v_1, v_2, v_3 als Zeilen in eine Matrix schreiben und diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[vertausche erste und zweite Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[multipliziere die dritte Zeile mit 2]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Summe der zweiten und dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Zeilen der letzten Matrix linear abhängig sind, sind es v_1, v_2, v_3 auch.

ii) Gäbe es $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$, so müsste für die erste Komponente gelten: $3 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$. Dies ist nicht möglich. Deshalb gibt es keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$, also mit

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} \alpha_1 & & + \alpha_3 a & = & 0 \\ & \alpha_2 & + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & - \alpha_2 & + \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & -a\alpha_3 \\ \alpha_2 & = & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & = & -2\alpha_3 \end{array} \right.$$

Betrachtet man die erste und die dritte Zeile, so erkannt man, dass es nur für $a = 2$ eine Lösung gibt, die sich von $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ unterscheidet (z.B. $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$, dann gilt $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$).

Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 nur für $a = 2$ linear abhängig.

c) Eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist durch die drei Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Um $\text{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$ zu zeigen, reicht es zu begründen, dass wir jeden dieser Basisvektoren durch b_1, b_2, b_3 darstellen können: $e_1 = b_3 - b_2$, $e_3 = b_3 - b_1$, $e_2 = b_1 - e_1 = b_1 - (b_3 - b_2) = b_1 - b_3 + b_2$.

Alternativ können wir auch zeigen, dass die drei Vektoren b_1, b_2, b_3 des $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ folgt dann $\text{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$.
Wir schreiben dazu b_1, b_2, b_3 als Zeilen in eine Matrix und bringen diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Differenz der ersten von der dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit gilt (mit den Bezeichnungen von 1.7) $n = r = 3$ und die Vektoren b_1, b_2, b_3 sind linear unabhängig.

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$.

a) Ist $M \subset V$ mit $0 \in M$, so gilt $\text{lin}(M) = \text{lin}(M \setminus \{0\})$. Daher ist M linear abhängig.

b) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise ist $M = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2 = V$ linear abhängig, jedoch kann $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht als Linearkombination des Nullvektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dargestellt werden, d.h. es existiert kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. [Weiteres Gegenbeispiel siehe Aufgabe 2 a)]

c) Es gebe einen Vektor $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_n$ (d.h. es gebe eindeutige $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$). Wir nehmen an, dass der Nullvektor neben der Darstellung als triviale Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ noch eine andere Darstellung als Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ besitzt. Dann hat aber auch $v = v + 0$ zwei verschiedene Darstellungen als Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich lässt sich der Nullvektor nur als tiviale Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ darstellen, so dass die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

d) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ sind die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Wählt man $v := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, so sind die Vektoren $v_1 + v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 + v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig, denn es gilt $0 \cdot (v_1 + v) + 1 \cdot (v_2 + v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $V = \mathbb{C}^2$. Dort sind $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Außerdem sind v_1 und $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Die Vektoren v_2 und v_3 sind jedoch nicht linear unabhängig, denn es gilt $v_2 - v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{2}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 6Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to -\frac{1}{3}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + \frac{7}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In der Zeilennormalform von A gibt es drei nichtverschwindende Zeilen, also hat A Rang 3. [Daher ist $\dim \operatorname{Bild}(A) = 3$, so dass $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$ folgt. Eine Basis von $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$ ist etwa gegeben durch die Standardnormalbasis e_1, e_2, e_3. Der Zeilennormalform von A lesen wir (z.B. mit dem (-1)-Ergänzungstrick) ab: $\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{lin}(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$, also bildet $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\operatorname{Kern}(A)$.]

Nun zur Matrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(j=2,3,4)]{Z_j \to Z_j - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha-2 & \beta-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2]{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha-2 & \beta-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3]{Z_4 \to Z_4 + Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} =: \widetilde{B}$$

Fall 1: $\alpha = 10$ und $\beta = 4$. In diesem Fall steht die Zeilennormalform von B bereits da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da hier genau 3 nichtverschwindende Zeilen existieren, hat B in diesem Fall Rang 3. [Wegen $\dim \operatorname{Bild}(B) = \operatorname{rg}(B) = 3$ muss man zur Angabe einer Basis von $\operatorname{Bild}(B)$ drei linear unabhängige Vektoren aus $\operatorname{Bild}(B)$ finden. Der Zeilennormalform von B können wir entnehmen, dass der erste, zweite und dritte Spaltenvektor von B, d.h. $Be_1, Be_2, Be_3 \in \operatorname{Bild}(B)$, linear unabhängig sind. Somit ist eine Basis von $\operatorname{Bild}(B)$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Eine Basis ist keineswegs eindeutig bestimmt, wir könnten beispielsweise auch die drei linear unabhängigen Vektoren Be_1, Be_2, Be_5 als Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ nehmen.

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir der Zeilennormalform von B ab, dass $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(B)$ ist.]

Fall 2: $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$. Dann erhalten wir

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\beta-4)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und lesen ab: In diesem Fall hat B Rang 4.

[Wegen $\dim \mathrm{Bild}(B) = 4$ gilt $\mathrm{Bild}(B) = \mathbb{R}^4$, so dass eine Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ etwa durch e_1, e_2, e_3, e_4 gegeben ist. Der Zeilennormalform von B entnehmen wir $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$, also ist $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(B)$.]

Fall 3: $\alpha \neq 10$. Dann setzen wir $\delta := (\beta - 4)/(\alpha - 10)$ und erhalten

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\alpha-10)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 4Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 6Z_4,\ Z_2 \to Z_2 + Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 - 6\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 + 4\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix}.$$

Die Matrix B besitzt somit auch in diesem Fall Rang 4.

[Wegen $\dim \mathrm{Bild}(B) = 4$ gilt $\mathrm{Bild}(B) = \mathbb{R}^4$, so dass eine Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ etwa durch e_1, e_2, e_3, e_4 gegeben ist. Der Zeilennormalform von B lesen wir ab $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} 3 - 6\delta \\ \delta \\ -1 + 4\delta \\ \delta \\ -1 \end{pmatrix})$, also ist $\begin{pmatrix} 3 - 6\delta \\ \delta \\ -1 + 4\delta \\ \delta \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(B)$.]

Aufgabe 5

a) Der Nullvektor in $C([0,1])$ ist die Nullfunktion $n\colon [0,1] \to \mathbb{C}, x \mapsto 0$. Die Funktionen f, g, h sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\alpha f + \beta g + \gamma h = n$ stets $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt, wenn also aus $\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ stets $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt.

Seien also $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \cdot 2 + \beta(x-1) + \gamma(x^2+3x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$, d.h. $(2\alpha - \beta) + (\beta + 3\gamma)x + \gamma x^2 = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Sind $p_k\colon [0,1] \to \mathbb{C}, x \mapsto x^k$ für $k = 0,1,2$ definiert, so lässt sich dies schreiben als $(2\alpha - \beta)p_0 + (\beta + 3\gamma)p_1 + \gamma p_2 = n$. Da die Monome p_0, p_1, p_2 in $C([0,1])$ linear unabhängig sind (vgl. Beispiel in 1.9), kann man den Nullvektor, d.h. die Nullfunktion n, nur als triviale Linearkombination von p_0, p_1, p_2 schreiben, so dass $2\alpha - \beta = \beta + 3\gamma = \gamma = 0$ folgt. Hieraus ergibt sich sofort $\gamma = 0$ und daher $\beta + 3 \cdot 0 = 0$, also $\beta = 0$, was schließlich auf $\alpha = 0$ führt. Damit ist die lineare Unabhängigkeit von f, g, h gezeigt.

b) f, g, h bildet eine Basis von $P_2([0,1]) = \text{lin}(p_0, p_1, p_2)$, weil $\dim P_2([0,1]) = 3$ ist und die drei Funktionen $f, g, h \in P_2([0,1])$ linear unabhängig sind.

c) Für jedes $x \in [0,1]$ gilt $p(x) = 8x^2 + 2x + 2 = 8(x^2 + 3x) - 22x + 2 = 8h(x) - 22(x-1) - 20 = 8h(x) - 22g(x) - 10f(x)$. Daher ist $p = 8h - 22g - 10f$, so dass die Koordinaten von p bzgl. der Basis f, g, h durch $(-10, -22, 8)$ gegeben sind.

Bemerkung: Die Reihenfolge der Basiselemente ist bei der Angabe der Koordinaten von entscheidender Bedeutung. So lauten beispielsweise die Koordinaten von p bzgl. der Basis g, h, f: $(-22, 8, -10)$.

Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2012
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 6

a) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

liegt bereits in Zeilennormalform vor:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(Stellen wir uns hier das Endergebnis beim Lösungsalgorithmus vor, so wären hier womöglich noch Nullzeilen). Nun verwenden wir den (-1)-Ergänzungstrick (Dafür muss die Zeilennormalform vorliegen!). In jeder Spalte der Koeffizientenmatrix sollte eine neue Stufe anfangen. Dies erzwingen wir, indem wir zwei Zeilen der Form $0 \dots 0 \ -1 \ 0 \dots 0$ einfügen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Jetzt können wir die Lösung ablesen: die beiden *Spalten* mit den neu hinzugekommenen Stufen (an den -1-en erkennbar) bilden eine Basis des homogenen Lösungsraums und die letzte *Spalte* ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems. Für die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ergibt sich daher

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Bemerkung: Das Einfügen jener -1-Zeilen ist nichts anderes als das Setzen von freien Parametern. Betrachten wir das ursprüngliche Gleichungssystem mit Variablen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

setzen zwei Parameter (aber mit Minuszeichen)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

lassen in jeder Zeile nur eine Variable stehen

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + \lambda + 2\mu \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 &= 1 + 4\mu \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

und schreiben vektoriell

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 = & 2 \\ -2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 = & -3 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 = & -1 \end{array}$$

zu lösen, bestimmen wir die Zeilennormalform der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 + 2Z_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_2]{\substack{Z_2 \to -Z_2 \\ Z_3 \to -\frac{1}{3}Z_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und verwenden den (-1)-Ergänzungstrick, d.h. wir lassen Nullzeilen in der Zeilennormalform weg und ergänzen Zeilen mit -1 und sonst Nullen so, dass auf der Diagonalen nur ±1 steht:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Nun können wir die allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ des linearen Gleichungssystems ablesen:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 7

a) Wir verwenden die Kirchhoffschen Gesetze, um das Gleichungssystem aufzustellen: Die Knotenregel liefert die Gleichungen

$$I = I_1 + I_2 \qquad \text{und} \qquad I_2 = I_3 + I_4\,.$$

Die Maschenregel liefert zwei weitere Gleichungen, nämlich

$$R_3 I_3 = R_4 I_4 \qquad \text{und} \qquad R_1 I_1 = R_2 I_2 + R_3 I_3\,.$$

(Die Maschenregel liefert auch noch $R_1 I_1 = R_2 I_2 + R_4 I_4$, aber diese Information ist in den beiden anderen Gleichungen bereits enthalten.) Insgesamt ergibt sich mit den gegebenen Werten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= 1 \\ I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \\ \alpha I_3 - \beta I_4 &= 0 \\ \alpha I_1 - \alpha I_2 - \alpha I_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) Wir betrachten nun die zugehörige erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & -\alpha & -\alpha & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - \alpha Z_1]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & -2\alpha & -\alpha & 0 & -\alpha \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 2\alpha Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha & -2\alpha & -\alpha \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha - 3\beta & -\alpha \end{array}\right) =: B$$

Fall 1: Für $\delta := 2\alpha + 3\beta \neq 0$ erhalten wir

$$\xrightarrow{Z_4 \to -Z_4/\delta} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{Z_2 \to Z_2 + Z_4 \\ Z_3 \to Z_3 + \beta Z_4}]{Z_1 \to Z_1 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha/\delta \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha/\delta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha\beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{array}\right) =: B_1$$

Fall 1.1: Ist zusätzlich $\alpha \neq 0$, so geht es weiter wie folgt:

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3/\alpha} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1-\alpha/\delta \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha/\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2+Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1-(\alpha+\beta)/\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (\alpha+\beta)/\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem ist folglich eindeutig lösbar; man hat

$$I_1 = 1 - \frac{\alpha+\beta}{\delta} = \frac{\alpha+2\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_2 = \frac{\alpha+\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_3 = \frac{\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_4 = \frac{\alpha}{2\alpha+3\beta}.$$

Fall 1.2: Ist dagegen $\alpha = 0$, so haben wir

$$B_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Sämtliche Lösungen dieses inhomogenen Systems erhalten wir, indem wir $I_3 = \lambda$ beliebig wählen. Dann ergibt sich $I_1 = 1-\lambda$, $I_2 = \lambda$ und $I_4 = 0$. Die allgemeine Lösung lautet folglich

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Fall 2: Gilt $2\alpha + 3\beta = 0$, also $\beta = -\frac{2}{3}\alpha$, so ist

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{2}{3}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{array}\right).$$

Fall 2.1: Für $\alpha \neq 0$ folgt wegen der letzten Zeile: Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

Fall 2.2: Ist dagegen $\alpha = 0$, so haben wir

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir können $I_3 = \lambda$ und $I_4 = \mu$ beliebig wählen; dann folgt $I_1 = 1 - \lambda - \mu$ und $I_2 = \lambda + \mu$. Die allgemeine Lösung ist daher in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

(Alternativ hätte auch der (-1)-Ergänzungstrick auf dieses Ergebnis geführt.)

Aus physikalischer Sicht sind nur Werte $\alpha, \beta > 0$ sinnvoll. Dann haben wir stets Fall 1.1 und damit eindeutige Lösbarkeit.

Aufgabe 8

a) Für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

wobei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Daher ist ϕ nach Beispiel (1) in 1.16 linear. Unter Verwendung des (-1)-Ergänzungstricks liest man der Zeilennormalform $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ von A ab:

$$\text{Kern } \phi = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, Ax = 0\} = \text{Kern } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Insbesondere ist dim Kern $\phi = 1$, so dass nach der Dimensionsformel 1.15 gilt: dim Bild $\phi = 2 -$ dim Kern $\phi = 1$. Da der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wegen $\phi(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Bild ϕ enthalten ist, ergibt sich somit

$$\text{Bild } \phi = \{\phi(x) \,:\, x \in \mathbb{R}^2\} = \{Ax \,:\, x \in \mathbb{R}^2\} = \text{Bild } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Alternativ: Da Bild A die lineare Hülle der Spalten von A ist, erhält man

$$\text{Bild } \phi = \text{Bild } A = \left\{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,:\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(\alpha_1 + \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,:\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

b) Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Für jedes $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ definiere

$$P_a(x) := \left(\sum_{j=1}^{3} x_j a_j\right) a.$$

i) Die Abbildung $P_a \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist linear, denn für alle $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$P_a(\alpha x + y) = \left(\sum_{j=1}^{3} (\alpha x_j + y_j) a_j\right) a = \left(\alpha \sum_{j=1}^{3} x_j a_j + \sum_{j=1}^{3} y_j a_j\right) a = \alpha P_a(x) + P_a(y).$$

ii) Um die Darstellungsmatrix von P_a bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$ anzugeben, berechnen wir für jeden Basisvektor e_k ($k \in \{1, 2, 3\}$) das Bild $P_a(e_k)$ und stellen dieses als Linearkombination von e_1, e_2, e_3 (den Basisvektoren im Zielraum) dar. Ist $a = (a_1, a_2, a_3) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, so ergibt sich für jedes $k \in \{1, 2, 3\}$

$$P_a(e_k) = \left(\sum_{j=1}^{3} \delta_{jk} a_j\right) a = a_k a = \begin{pmatrix} a_k a_1 \\ a_k a_2 \\ a_k a_3 \end{pmatrix} = (a_k a_1) e_1 + (a_k a_2) e_2 + (a_k a_3) e_3.$$

Damit lautet die k-te Spalte der gesuchten Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} a_k a_1 \\ a_k a_2 \\ a_k a_3 \end{pmatrix}$ für $k \in \{1, 2, 3\}$.

Also ist die Darstellungsmatrix von P_a bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ gleich

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_2 a_1 & a_3 a_1 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_3 a_2 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

c) Aufgrund der Linearität von ϕ gilt

$$\begin{aligned}
\phi(e_1) &= \phi(e_1+e_2+e_3) - \phi(e_2+e_3) = (e_2-e_3) - e_1 = (-1)e_1 + 1e_2 + (-1)e_3\,,\\
\phi(e_2) &= \phi(e_2+e_3) - \phi(e_3) = e_1 - (2e_1+3e_2+5e_3) = (-1)e_1 + (-3)e_2 + (-5)e_3\,,\\
\phi(e_3) &= 2e_1+3e_2+5e_3\,.
\end{aligned}$$

Somit lautet die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wenn nicht vorgegeben ist, bezüglich welcher Basen man eine Darstellungsmatrix von ϕ angeben soll, kann man die Aufgabe sehr elegant lösen, indem man die Basen besonders geschickt wählt: Nimmt man "vorne" etwa die Basis $e_3, e_2+e_3, e_1+e_2+e_3$ und "hinten" die Basis $2e_1+3e_2+5e_3, e_1, e_2-e_3$ (Man sieht leicht, dass es sich dabei tatsächlich um Basen des $\mathbb{R}^3$ handelt), dann bildet ϕ den k-ten Basisvektor der "vorderen" Basis auf den k-ten Basisvektor der "hinteren" Basis ab ($k \in \{1,2,3\}$), weshalb die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basen die Einheitsmatrix I_3 ist. Beachte: ϕ ist nicht die Identitätsabbildung!

Aufgabe 9

a) Um zu begründen, dass v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $W := \mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ ist, reicht es zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3, v_4 in $C^2((-\pi,\pi))$ linear unabhängig sind. Seien dazu $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ mit $c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4 = n$. Hierbei bezeichnet $n\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$, die Nullfunktion, also den Nullvektor in $C^2((-\pi,\pi))$. Für alle $x \in (-\pi,\pi)$ gilt dann

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 x \sin x + c_4 x \cos x = 0\,.$$

Insbesondere für $x = 0$ ergibt sich $c_2 = 0$. Dies führt auf

$$c_1 \sin x + c_3 x \sin x + c_4 x \cos x = 0 \qquad \text{für alle } x \in (-\pi,\pi). \tag{$*$}$$

Differenzieren wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$c_1 \cos x + c_3 x \cos x + c_3 \sin x - c_4 x \sin x + c_4 \cos x = 0 \qquad \text{für alle } x \in (-\pi,\pi). \tag{$**$}$$

Für $x = 0$ ist gemäß $(**)$: $c_1 + c_4 = 0$. (I)

Für $x = \frac{\pi}{2}$ gilt nach $(**)$: $c_3 - c_4\frac{\pi}{2} = 0$. (II)

Für $x = \frac{\pi}{2}$ gilt nach $(*)$: $c_1 + c_3\frac{\pi}{2} = 0$. (III)

Löst man (II) nach c_3 auf und setzt dies in (III) ein, so bekommt man $0 = c_1 + (c_4\frac{\pi}{2})\frac{\pi}{2} = c_1 + \frac{\pi^2}{4}c_4$. Subtraktion dieser Gleichung von (I) führt auf $(1-\frac{\pi^2}{4})c_4 = 0$, also $c_4 = 0$. Laut (I) und (II) muss damit auch $c_1 = c_3 = 0$ gelten.

Insgesamt haben wir $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Somit sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig.

b) Wir zeigen zunächst, dass für jedes $f \in W$ auch $D(f)$ in W liegt. Sei dazu $f \in W$, etwa $f = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$ für gewisse Zahlen $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und es gilt für alle $x \in (-\pi,\pi)$

$$D(f)(x) = f'(x) = (a_3 - a_2)\sin x + (a_1 + a_4)\cos x + a_3 x \cos x - a_4 x \sin x.$$

Folglich liegt $D(f)$ in W, so dass D tatsächlich von W nach W abbildet.

D ist linear, denn für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in W$ gilt nach den aus der HM I bekannten Eigenschaften der Ableitung

$$D(\alpha f + g) = (\alpha f + g)' = \alpha f' + g' = \alpha D(f) + D(g)\,.$$

c) Wegen

$$\begin{aligned}
D(v_1) &= v_2 = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4,\\
D(v_2) &= -v_1 = (-1)\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4,\\
D(v_3) &= v_1 + v_4 = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 1\cdot v_4,\\
D(v_4) &= v_2 - v_3 = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + (-1)\cdot v_3 + 0\cdot v_4
\end{aligned}$$

lautet die Darstellungsmatrix $M(D)$ von D bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3, v_4

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Darstellungsmatrix $M(D^2)$ von D^2 bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 gilt

$$M(D^2) = M(D)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Auf das selbe Ergebnis kommen wir, wenn wir uns überlegen, wie die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren von W unter D^2 bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 aussehen:

$$\begin{aligned}
D^2(v_1) &= D(D(v_1)) = D(v_2) = -v_1 = (-1)\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4,\\
D^2(v_2) &= D(D(v_2)) = D(-v_1) = -v_2 = 0\cdot v_1 + (-1)\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4,\\
D^2(v_3) &= D(D(v_3)) = D(v_1 + v_4) = 2v_2 - v_3 = 0\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + (-1)\cdot v_3 + 0\cdot v_4,\\
D^2(v_4) &= D(D(v_4)) = D(v_2 - v_3) = -2v_1 - v_4 = (-2)\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + (-1)\cdot v_4.
\end{aligned}$$

Also besteht die k-te Spalte der Darstellungsmatrix exakt aus den Koordinaten von $D^2(v_k)$ bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 (für $k = 1, 2, 3, 4$).

d) Die Koordinaten der Funktion g bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 sind $\begin{pmatrix} 0\\ 5\\ 2\\ 0 \end{pmatrix}$. Daher ergibt sich für die Koordinaten von $D^2(g)$ bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3, v_4

$$M(D^2)\begin{pmatrix} 0\\ 5\\ 2\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 5\\ 2\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ -1\\ -2\\ 0 \end{pmatrix},$$

also $D^2(g) = 0\cdot v_1 + (-1)\cdot v_2 + (-2)\cdot v_3 + 0\cdot v_4 = -v_2 - 2v_3$.

Auf dieses Ergebnis kommen wir durch Differenzieren von g: $g'(x) = 2\sin x + 2x\cos x - 5\sin x$, $g''(x) = 2\cos x + 2\cos x - 2x\sin x - 5\cos x = -\cos x - 2x\sin x = -v_2(x) - 2v_3(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Aufgabe 10

a) Die Summe $A+C$ ist nicht definiert, weil die Spaltenanzahl von A und C nicht übereinstimmt. Auch das Produkt CB ist undefiniert, denn bei Matrizenprodukten muss die Anzahl der Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors sein. Alle anderen Ausdrücke können wir berechnen:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2\\ 1 & 0 & 3-i\\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3C = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 3 & -3i \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i & -3-5i & 6+6i \\ 1 & 2-3i & 2 \\ 6+i & -12-2i & 14+3i \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3i & 12+2i & -11-i \\ 6+2i & 7+3i & -8+i \\ 0 & 3 & 3-3i \end{pmatrix}$$

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5i & 6 \\ 6-i & 6-2i \\ 2i & -6-7i \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Insbesondere gilt $AB \neq BA$, d.h. Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Für $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$LA = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l_{11}+2l_{12} \\ 0 & l_{21}+2l_{22} \end{pmatrix}.$$

Also ist LA gleich der Nullmatrix genau dann, wenn $l_{11}+2l_{12}=0$ und $l_{21}+2l_{22}=0$ gelten. Dies sind zwei (homogene) lineare Gleichungssysteme. Die erweiterte Matrix zu $l_{11}+2l_{12}=0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{bzw. kurz} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

liegt bereits in Zeilennormalform vor, so dass man direkt mit dem (-1)-Ergänzungstrick die Lösung ablesen kann

$$\begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ -s \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Analog erhält man für die Lösung von $l_{21}+2l_{22}=0$

$$\begin{pmatrix} l_{21} \\ l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Folglich gilt $LA = 0$ genau für Matrizen der Form

$$L = \begin{pmatrix} 2s & -s \\ 2t & -t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad s,t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Sommersemester 2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 11

a) Mit Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 5Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & -5 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_1]{Z_3 \to Z_3 + 5Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - 3Z_3]{Z_4 \to Z_4 - 6Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & -14 & -15 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -30 & -30 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 + 2Z_1]{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & 15 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{permutieren}]{\text{Zeilen}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass A regulär ist, und haben zugleich $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ berechnet.

Für die Matrix B ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - Z_2]{Z_4 \to Z_4 - 3Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist B regulär mit $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

hat die Matrix C den Rang 2, so dass $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ nicht regulär ist.

Da A und B regulär sind, gilt:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 42 & 49 & 10 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -38 & -45 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 & -2 \\ 1 & 5 & 15 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$((AB)^T)^{-1} = ((AB)^{-1})^T = \begin{pmatrix} 42 & 5 & 12 & -38 \\ 49 & 5 & 15 & -45 \\ 10 & 1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hier verwendeten wir das folgende Resultat: Ist $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so ist auch D^T regulär und es gilt $(D^T)^{-1} = (D^{-1})^T$.

In der Tat ergibt sich mit den Rechenreglen für das Transponieren von Matrizen

$$(D^{-1})^T D^T = (DD^{-1})^T = I_n^T = I_n \qquad \text{und} \qquad D^T(D^{-1})^T = (D^{-1}D)^T = I_n^T = I_n .$$

b) Da A und AB regulär sind, erhalten wir jeweils die eindeutig bestimmten Lösungen

$$x = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad x = (AB)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12

Wiederholung des Gram-Schmidt-Verfahrens:
In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{K}$ seien n linear unabhängige Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ gegeben. Wir wollen ein Orthonormalsystem $u_1, \ldots, u_n \in V$ so konstruieren, dass $\operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_j\} = \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_j\}$ für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt.
Wir bestimmen zunächst nur ein Orthogonalsystem $v_1, \ldots, v_n$ mit der Eigenschaft $\operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_j\} = \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_j\}$ für alle $j = 1, \ldots, n$. (Bei einem Orthogonalsystem wird nur verlangt, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind, nicht aber, dass sie Norm 1 haben.) Die Forderung $\operatorname{lin}\{v_1\} = \operatorname{lin}\{x_1\}$ können wir erfüllen, indem wir $v_1 := x_1$ setzen. Dann geht unser Verfahren rekursiv weiter: Haben wir für ein gewisses $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ ein Orthogonalsystem $v_1, \ldots, v_j$ mit $\operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_j\} = \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_j\}$ gefunden, so ist die Frage, wie wir v_{j+1} definieren sollen. Setzen wir

$$v_{j+1} := x_{j+1} + \sum_{k=1}^{j} \lambda_k v_k$$

mit gewissen $\lambda_k \in \mathbb{K}$, so ist die Forderung $\operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_{j+1}\} = \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_{j+1}\}$ erfüllt. Damit dieses v_{j+1} zusätzlich orthogonal zu allen v_i mit $i \in \{1, \ldots, j\}$ ist, muss

$$0 \overset{!}{=} \langle v_{j+1}, v_i \rangle = \langle x_{j+1}, v_i \rangle + \sum_{k=1}^{j} \lambda_k \langle v_k, v_i \rangle = \langle x_{j+1}, v_i \rangle + \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$$

für alle $i \in \{1, \ldots, j\}$ gelten. Folglich wählen wir

$$\lambda_i := -\frac{\langle x_{j+1}, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = -\frac{\langle x_{j+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}\,.$$

Fassen wir zusammen: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ werden rekursiv definiert durch

$$v_1 := x_1\,, \qquad v_{j+1} := x_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle x_{j+1}, v_k \rangle}{\|v_k\|^2}\, v_k \quad (j = 1, \ldots, n-1)\,.$$

Man beachte: Die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig; daher gilt $x_1 \neq 0$ und $x_{j+1} \notin \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_j\} = \operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_j\}$ für $j = 1, \ldots, n-1$, und damit folgt $v_j \neq 0$ für alle j. Somit ist die Division durch $\|v_k\|^2$ möglich.
Setzen wir nun noch $u_j := v_j / \|v_j\|$ $(j = 1, \ldots, n)$, so haben wir ein Orthonormalsystem mit den geforderten Eigenschaften bestimmt.

a) Die gegebenen Vektoren x_1, x_2, x_3 sind linear unabhängig. Um das zu sehen, kann man die Vektoren zeilenweise in eine Matrix schreiben und diese auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2i & 0 \\ 5 & 3i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 5Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 3i & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - \frac{3}{2} Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Führe nun das Gram-Schmidt-Verfahren durch:

$$v_1 := x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\langle x_2, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot \overline{1} + 2i \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1} = 2$$

erhalten wir

$$v_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}\, v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Beachte: Es gilt $\|v_2\| = (|1|^2 + |2i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$.) Für die Berechnung von v_3 brauchen wir die Skalarprodukte

$$\langle x_3, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{0} + 1 \cdot \overline{1} = 6\,,$$

$$\langle x_3, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{2i} + 1 \cdot \overline{(-1)} = 5 - 6i^2 - 1 = 10\,.$$

Damit ergibt sich dann

$$v_3 := x_3 - \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v_3, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 := \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Fazit: u_1, u_2, u_3 ist ein Orthonormalsystem mit den gewünschten Eigenschaften.

b) Wir wollen das Verfahren von Gram-Schmidt benutzen. Dazu prüfen wir zuerst die gegebenen Vektoren y_1, y_2, y_3 auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 3Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 5Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & -6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit sind y_1, y_2, y_3 linear abhängig, insbesondere können wir an der Zeilenstufenform ablesen, dass y_3 eine Linearkombination von y_1 und y_2 ist (dies ist möglich, da bei den Zeilenumformungen keine Zeilen vertauscht wurden). Infolgedessen gilt $\mathrm{lin}\{y_1, y_2, y_3\} = \mathrm{lin}\{y_1, y_2\}$.

Wir sehen außerdem, dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}\{y_1, y_2\}$ führen wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt durch:

$$v_1 := y_1, \quad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{1}{2} y_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $\langle y_2, v_1 \rangle = 5 - 1 + 1 - 1 = 4$ und wir erhalten

$$v_2 := y_2 - \frac{\langle y_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden u_1, u_2 eine Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}\{y_1, y_2\} = \mathrm{lin}\{y_1, y_2, y_3\}$.

Aufgabe 13

a) Die Aussage ist wahr: Sei $x \in V$. Da die Gleichung $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$ gilt, ist diese insbesondere für $y = x$ erfüllt. Also haben wir $\langle x, x \rangle = 0$. Nach Definition des Skalarprodukts kann dies nur für $x = 0$ der Fall sein.

b) Die Aussage ist wahr: Seien $x_1, \ldots, x_n, x \in V$. Es gelte $x \neq 0$ und $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in \mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Wäre $\mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} = V$, so hätten wir $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$. Aus **a)** folgte dann unmittelbar $x = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq 0$. Also ist die Annahme falsch und es gilt $\mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} \neq V$.

Aufgabe 14

a) Vorüberlegung: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Bezeichnet a_j die j-te Spalte von A, so gilt

$$A^*A = \begin{pmatrix} \overline{a_1}^T \\ \overline{a_2}^T \\ \vdots \\ \overline{a_n}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a_1}^T a_1 & \overline{a_1}^T a_2 & \cdots & \overline{a_1}^T a_n \\ \overline{a_2}^T a_1 & \overline{a_2}^T a_2 & \cdots & \overline{a_2}^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_n}^T a_1 & \overline{a_n}^T a_2 & \cdots & \overline{a_n}^T a_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_2, a_1\rangle & \cdots & \langle a_n, a_1\rangle \\ \langle a_1, a_2\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \cdots & \langle a_n, a_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_1, a_n\rangle & \langle a_2, a_n\rangle & \cdots & \langle a_n, a_n\rangle \end{pmatrix}.$$

In A^*A ist also $\langle a_j, a_k\rangle$ das Element in der k-ten Zeile und j-ten Spalte. Hiermit erhalten wir

$$A \text{ ist unitär} \iff A^*A = I_n \iff \langle a_j, a_k\rangle = \delta_{jk} \text{ für alle } j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$$
$$\overset{\dim \mathbb{C}^n = n}{\iff} a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ bilden eine Orthonormalbasis des } \mathbb{C}^n.$$

b) Die beiden gegebenen Vektoren haben Norm 1 und sind orthogonal zueinander. Nach **a)** müssen wir die beiden Vektoren zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$ ergänzen. Dazu bestimmen wir zunächst einen Vektor $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ mit

$$\left\langle z, \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \text{und} \qquad \left\langle z, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0\,.$$

Komponentenweise geschrieben und mit $\sqrt{2}$ bzw. 2 durchmultipliziert bedeutet das

$$-iz_1 - z_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad z_1 + iz_2 + (1+i)z_3 = 0\,.$$

Die erste Gleichung können wir mit $z_1 = 1$ und $z_2 = -i$ erfüllen. Die zweite Gleichung liefert dann $2 + (1+i)z_3 = 0$, also $z_3 = -2/(1+i) = -1+i$. Den so gefundenen Vektor

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}$$

müssen wir noch normieren, also durch seine Norm $\|z\| = \sqrt{1^2 + (-i)i + (-1+i)(-1-i)} = \sqrt{1+1+2} = 2$ teilen. Wir ergänzen daher den Vektor

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Der zu ergänzende Vektor ist nicht eindeutig bestimmt, man kann ihn mit beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$, für die $|c| = 1$ gilt, multiplizieren.

c) Im folgenden sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix.

i) Sei $z \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt

$$\|Az\|^2 = \langle Az, Az\rangle = \langle \underbrace{A^*A}_{=I_n} z, z\rangle = \langle z, z\rangle = \|z\|^2.$$

Alternativ: $\langle Az, Az\rangle = (\overline{Az})^T Az = (\overline{A}\,\overline{z})^T Az = \overline{z}^T \overline{A}^T Az = \overline{z}^T(\underbrace{A^*A}_{=I_n})z = \overline{z}^T z = \langle z, z\rangle$.

ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass es einen Vektor $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit $Az = \lambda z$. [Ein solches λ heißt *Eigenwert von* A und z ein *zugehöriger Eigenvektor*]. Mit Hilfe von **i)** erhält man dann

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = \langle Az, Az\rangle = \langle \lambda z, \lambda z\rangle = \lambda\langle z, \lambda z\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle z, z\rangle = |\lambda|^2\langle z, z\rangle = |\lambda|^2\|z\|^2.$$

Division mit $\|z\|^2 \neq 0$ (wegen $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$) ergibt $|\lambda|^2 = 1$, also $|\lambda| = 1$.

Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2012
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 15

a) Sei $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

i) Die Leibnizformel für Determinanten besagt

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}.$$

Die Elemente der S_3 sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\det(A) = +2\cdot 1\cdot(-2) - 2\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot(-1)\cdot(-2) - 4\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot(-1)\cdot(-1) = -4.$$

Bemerkung: Diese Methode zur Berechnung der Determinante ist recht ineffizient und wird daher kaum genutzt.

ii) Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned}\det(A) &= +2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 4\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\big(1\cdot(-2) - (-1)\cdot 1\big) - 2\big(-1\cdot(-2) - 1\cdot 1\big) + 4\big(-1\cdot(-1) - 1\cdot 1\big) = -4.\end{aligned}$$

iii) Wir ersetzen die 2. Spalte durch die Summe der 1. und 2. Spalte und entwickeln die resultierende Matrix nach der 2. Spalte:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4(-1\cdot(-2) - 1\cdot 1) = -4.$$

b) Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz. [Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\det(A) =_{[S_1\to S_1+S_2]} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_4\to Z_4-Z_1]} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} \; 2\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} =_{[Z_2\to Z_2-Z_1]} \; 2\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} \; 2\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = -2\big((-2)\cdot 2 - 2\cdot 2\big) = 16.$$

Bei der Matrix B gehen wir genauso vor:

$$\det(B) =_{[Z_1\to Z_1+Z_4]} \; \det\begin{pmatrix}5 & 5 & 5 & 5\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 4 & 0\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix} =_{[S_j\to S_j-S_1, j=2,3,4]} \; \det\begin{pmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 2\\ 3 & -4 & 1 & -3\\ 4 & -1 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 5\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -4 & 1 & -3\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix} =_{[Z_1\to Z_1+Z_3]} \; 5\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -4 & 1 & -3\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 5\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix}-4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix} = -5(8+1) = -45.$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\det(C) =_{[Z_1\to Z_1-Z_4]} \; \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1 & \alpha\end{pmatrix} =_{[S_4\to S_4-S_1]} \; \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & \alpha-3\end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 1\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \alpha-3\end{pmatrix} =_{[S_3\to S_3-S_1]} \; \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \alpha-4\end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \alpha-4\end{pmatrix} = \alpha-4-1 = \alpha-5.$$

Man sieht: $\det C \neq 0 \iff \alpha \neq 5$. Daher ist C genau für $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{5\}$ regulär.

Aufgabe 16

a)

$$D_1(x) = \det(a_0) = a_0$$

$$D_2(x) = \det\begin{pmatrix}a_0 & a_1\\ -1 & x\end{pmatrix} = a_0x + a_1$$

$$D_3(x) = \det\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & a_2\\ -1 & x & 0\\ 0 & -1 & x\end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} \; a_0\det\begin{pmatrix}x & 0\\ -1 & x\end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ -1 & x\end{pmatrix} = a_0x^2 + a_1x + a_2$$

b) Vermutung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $D_{n+1}(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^{n-k}$.

Wir beweisen die Behauptung mittels vollständiger Induktion.

Den Induktionsanfang haben wir schon in Teil **a)** gezeigt. Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest. Für dieses n gelte

$$D_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^{n-k} \qquad \text{(IV)}.$$

Dann folgt:

$$D_{n+2}(x) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_{n+2}]} \ (-1)^{n+2+1} a_{n+1} \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}} + (-1)^{n+2+n+2} x D_{n+1}(x)$$

$$= (-1)^{n+1} a_{n+1} (-1)^{n+1} + x D_{n+1}(x) =_{[(\text{IV})]} \ a_{n+1} + x \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

$$= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{n+1-k}.$$

Somit ist unsere Vermutung bewiesen.

c) Wählen wir in der gegebenen Matrix $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = x = -1$, so gilt:

$$\det(B_{n+1}) = (-1)^{n+1} D_{n+1}(-1) =_{[\mathbf{b)}]} \ (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)(-1)^{n-k}$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Matrix B_{n+1} ist also genau dann invertierbar, falls n gerade ist. Man kann an der Matrix auch ablesen, dass für ungerades n die 1. Zeile die Summe der $2., 4., \ldots$ und $(n+1)$-ten Zeile ist und die Matrix in diesem Fall nicht invertierbar sein kann.

Aufgabe 17

a) Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n\times n}$ nach $\mathbb{C}$.
Nein (außer für $n = 1$). Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. [Verwende n-mal (D2)]

b) Ist A regulär, so gilt $\det(A^{-1}A^T A^2 A^T A^{-1}) = (\det A)^2$.
Ja, denn für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt nach dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\det(A^{-1}A^T A^2 A^T A^{-1}) = \det(A^{-1}) \det(A^T) \det(A^2) \det(A^T) \det(A^{-1})$$
$$= \frac{1}{\det(A)} \det(A) \, (\det(A))^2 \det(A) \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^2 .$$

c) $\det(A + B) = \det A + \det B$?
Nein (außer für $n = 1$ oder besonders ausgewählte Matrizen A und B, etwa $A = 0$).
Zum Beispiel ist $\det(I_2 + I_2) = \det(2I_2) = 2^2 \det I_2 = 4 \neq 2 = \det I_2 + \det I_2$.

d) $\det\big((\det A)B\big) = (\det A)^n \det B$?
Ja. $\det A$ ist ja nur eine Zahl (vgl. Erläuterung im **a)**-Teil).

Aufgabe 18

Mit $A = (a_1, a_2, a_3)$ bezeichnen wir die Koeffizientenmatrix des gegebenen linearen Gleichungssystems, mit b die rechte Seite. Die Cramersche Regel ist nur anwendbar, wenn A regulär ist; wegen

$$\det(A) =_{\left[\substack{Z_2 \to Z_2 + Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 - 2Z_1}\right]} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.}\, S_1]} \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 + Z_1]} \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -15 \neq 0$$

ist dies der Fall. Nach der Cramerschen Regel gilt dann

$$x_1 = \frac{\det(b, a_2, a_3)}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\det(a_1, b, a_3)}{\det(A)}, \qquad x_3 = \frac{\det(a_1, a_2, b)}{\det(A)}.$$

Wir erhalten also

$$x_1 = -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_3 \to Z_3 + Z_1]} -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{13}{15}.$$

Auch bei x_2 und x_3 addieren wir jeweils die erste Zeile zur dritten und entwickeln dann nach der zweiten bzw. dritten Spalte:

$$x_2 = -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15},$$

$$x_3 = -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.$$

Also ist $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{13}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{2}{3})$ die eindeutig bestimmte Lösung des gegebenen Systems.

Aufgabe 19

a) Für $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt

$$x \times y = \begin{pmatrix} -2 - 0 \\ 2 - 4 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\langle x \times y, x \rangle = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0$$

[dieses Ergebnis war zu erwarten, weil stets $x \times y$ sowohl orthogonal auf x als auch orthogonal auf y steht]. Für den Winkel θ, den die Vektoren x und y einschließen, gilt

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{4+0+4}} = \frac{-6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}} = -\sqrt{\frac{6}{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Hieraus folgt $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms lautet

$$\|x \times y\| = \| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}.$$

b) Die linke Seite der Gleichung ist zwar definiert und ergibt eine Zahl, doch rechts steht das Kreuzprodukt zweier reellen Zahlen, was nicht definiert ist. Daher gilt die Identität nicht.

(Selbst wenn man fälschlicherweise $\times$ als Multiplikation reeller Zahlen interpretieren würde, wäre die Gleichung nicht korrekt. Beispielsweise für $a := e_1, b := e_2, c := e_3$ gilt $b \times c = a$, so dass $\langle a, b \times c\rangle = 1$ ist. Andererseits ist $\langle a, b\rangle = \langle a, c\rangle = 0$. Folglich wäre die Identität auch in diesem Fall nicht erfüllt.)

Aufgabe 20

a) Wegen

$$(\sigma \circ \pi)(1) = \sigma(\pi(1)) = \sigma(4) = 1, \qquad (\sigma \circ \pi)(2) = \sigma(\pi(2)) = \sigma(3) = 4,$$
$$(\sigma \circ \pi)(3) = \sigma(\pi(3)) = \sigma(2) = 2, \qquad (\sigma \circ \pi)(4) = \sigma(\pi(4)) = \sigma(1) = 3$$

ist $\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Ähnlich sehen wir $\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Um $(\sigma \circ \pi)^{-1}$ zu bestimmen, vertauschen wir die obere Zeile von $\sigma \circ \pi$ mit der unteren Zeile und sortieren anschließend die Spalten so, dass die obere Zeile wieder korrekt dasteht: $(\sigma \circ \pi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Auf die gleiche Weise erhalten wir $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, woraus $\pi^{-1} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ folgt.

c) Eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$, welche zwei Elemente j, k mit $1 \leqslant j < k \leqslant n$ vertauscht und die restlichen festlässt, heißt *Transposition*. Diese bezeichnen wir mit τ_{jk}, also

$$\tau_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j-1 & k & j+1 & \ldots & k-1 & j & k+1 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Um σ als Hintereinanderausführung von Transpositionen zu schreiben, gehen wir schrittweise vor: Zunächst sorgen wir durch Vertauschen von 1 und 3 dafür, dass die 1 korrekt abgebildet wird. Dabei wird aber die 3 falsch positioniert (3 würde jetzt mit der 1 vertauscht werden, 3 soll aber auf 4 gehen), also stellt man im nächsten Schritt die 3 durch Vertauschen von 1 mit 4 richtig. Schließlich hat man soeben 4 mit 1 getauscht. Da auch die 2 korrekt abgebildet wird, ist man fertig und erhält als Endergebnis $\sigma = \tau_{14} \circ \tau_{13}$.

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, z.B. gilt auch $\sigma = \tau_{14} \circ \tau_{13} \circ \tau_{13} \circ \tau_{13}$ oder $\sigma = \tau_{34} \circ \tau_{14}$.

Da σ als Hintereinanderausführung einer geraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden kann, ist $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$. Dies lässt sich auch mit Hilfe der folgenden Darstellung des Signums einsehen:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Die Paare (i, j) mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $i < j$ lauten

$$(1, 2), \quad (1, 3), \quad (1, 4), \quad (2, 3), \quad (2, 4), \quad (3, 4).$$

Daher ergibt sich für obiges Produkt

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\sigma) &= \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\ &= \frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2-1} \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{3-1} \frac{\sigma(4) - \sigma(1)}{4-1} \frac{\sigma(3) - \sigma(2)}{3-2} \frac{\sigma(4) - \sigma(2)}{4-2} \frac{\sigma(4) - \sigma(3)}{4-3} \\ &= \frac{2-3}{1} \frac{4-3}{2} \frac{1-3}{3} \frac{4-2}{1} \frac{1-2}{2} \frac{1-4}{1} = 1. \end{aligned}$$

Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2012
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 21

Zunächst zur Matrix A: Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Dieses lautet

$$\det\begin{pmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_2]} \det\begin{pmatrix} 18-\lambda & -18+\lambda & 0 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$
$$=_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \det\begin{pmatrix} 0 & -18+\lambda & 0 \\ 20-\lambda & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } Z_1]} (18-\lambda)\det\begin{pmatrix} 20-\lambda & -4 \\ 1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (18-\lambda)\big((20-\lambda)(16-\lambda)+4\big) = (18-\lambda)\big(\lambda^2 - 36\lambda + 324\big) = -(\lambda-18)^3 .$$

Wegen $\chi_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 18$ besitzt die Matrix A nur den Eigenwert 18; dieser hat die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum $E_A(18)$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $Ax = 18x$ bzw. $(A - 18I_3)x = 0$, also genau $\mathrm{Kern}(A - 18I_3)$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 18I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \frac{1}{2}Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{4}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(18) = \mathrm{Kern}(A - 18I_3) = \{ s\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{C} \} = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Der Eigenwert 18 hat die geometrische Vielfachheit 2, weil der Eigenraum $E_A(18)$ zweidimensional ist. Da die geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 18 nicht übereinstimmen, ist A nicht diagonalisierbar, d.h. es gibt keine reguläre Matrix $S_A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ so, dass $S_A^{-1} A S_A$ eine Diagonalmatrix ist.

Jetzt zur Matrix B: Wir berechnen das zugehörige charakteristische Polynom

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_1 \to Z_1 + (1-\lambda)Z_3 \\ Z_2 \to Z_2 + 2Z_3}\right]} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 2-2\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$=_{[\text{Entw. n. } S_1]} -\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} = -\big(2 - 2\lambda - \lambda^2(1-\lambda)\big) = (\lambda^2 - 2)(1-\lambda)\,.$$

Wegen $\chi_B(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ hat die Matrix B die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Diese haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1.
Wir bestimmen nun den Eigenraum $E_B(1)$ zu $\lambda_1 = 1$, also die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $(B - I_3)x = 0$:

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_2 \to Z_2 + 2Z_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -Z_1,\, Z_2 \to -Z_2]{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_B(1) = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Der Eigenwert 1 besitzt die geometrische Vielfachheit 1, weil der zugehörige Eigenraum eindimensional ist.
Schließlich müssen wir noch die zu den beiden Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ gehörenden Eigenräume bestimmen. Analoges Vorgehen wie eben ergibt

$$E_B(\sqrt{2}\,) = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad \text{und} \qquad E_B(-\sqrt{2}\,) = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Die geometrische Vielfachheit von $\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ beträgt jeweils 1. Die Matrix B ist diagonalisierbar, weil für jeden Eigenwert von B geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen. Eine reguläre Matrix S so, dass $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat, erhält man folgendermaßen: Man wähle in jedem Eigenraum eine Basis und schreibe die Basisvektoren als Spalten $s_1, s_2, \ldots, s_n$ in eine Matrix S. Ist λ_j der Eigenwert zum Eigenvektor s_j, so erhält man $BS = SD$, wobei D die Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonalen ist (die Matrix SD hat die Spalten $\lambda_1 s_1, \lambda_2 s_2, \ldots, \lambda_n s_n$). Die Matrix S ist regulär und es ist $S^{-1}BS = D$. Definieren wir

$$S := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} - 2 & -\sqrt{2} - 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{dann gilt} \qquad S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die Wahl von S ist nicht eindeutig, so ergibt sich z.B. für

$$\widetilde{S} := \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 2 & 0 & -\sqrt{2} - 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}: \qquad \widetilde{S}^{-1}B\widetilde{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22

Das System

$$u' = 8u - 6v,$$
$$v' = 9u - 7v$$

ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir zeigen, dass A diagonalisierbar ist. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom von A

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 8 - \lambda & -6 \\ 9 & -7 - \lambda \end{pmatrix} = (8 - \lambda)(-7 - \lambda) + 9 \cdot 6 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Damit sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von A. Da die 2×2-Matrix A zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, ist A diagonalisierbar. Die Eigenräume von A lauten

$$E_A(-1) = \mathrm{Kern}(A + I_2) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$$

und

$$E_A(2) = \mathrm{Kern}(A - 2I_2) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Für die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich daher

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D,$$

woraus $A = SDS^{-1}$ folgt. Die bekannte Formel für die Inversion einer 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } ad - bc \neq 0)$$

führt auf

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = SDS^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn

$$S^{-1}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = DS^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

bzw. wenn

$$\begin{pmatrix} -u' + v' \\ 3u' - 2v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -u + v \\ 3u - 2v \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Sind $\widetilde{u} := -u + v$ und $\widetilde{v} := 3u - 2v$, also $\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} := S^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \widetilde{u}' = -\widetilde{u} \;\text{ und }\; \widetilde{v}' = 2\widetilde{v} \\ &\Longleftrightarrow \qquad \widetilde{u}(x) = c_1 e^{-x} \;\text{ und }\; \widetilde{v} = c_2 e^{2x} \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\widetilde{u} + \widetilde{v} \\ 3\widetilde{u} + \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

sind

$$\begin{aligned} u(x) &= 2\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 2c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \\ v(x) &= 3\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 3c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Lösungen des Systems (1).

Aufgabe 23

a) Wir berechnen zunächst die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A. Für das charakteristische Polynom von A ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =_{[Z_3 \to Z_3 - Z_2]} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_3 \to S_2 + S_3]} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. } Z_3]} -(\lambda-1)\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda-1)\big((2-\lambda)(3-\lambda)-2\big) = -(\lambda-1)\big(\lambda^2 - 5\lambda + 4\big) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4).$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A, also $1, 4$. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_A(1) = \operatorname{Kern}(A - I_3) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}),$$

$$E_A(4) = \operatorname{Kern}(A - 4I_3) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Da $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar. Aus dem gleichen Grund gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Um ein solches S zu bestimmen, muss man eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A angeben.

Setze

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_A(4) \qquad \text{sowie} \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_A(1).$$

Da $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist, stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander, also gilt $v_1 \perp v_2$. Ist

$$v_3 := v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

definiert, so sind $v_3 \perp v_1$ und $v_3 \perp v_2$. Wegen $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ folgt, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind und somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Aufgrund von $v_1 \in E_A(4)$, $\dim E_A(4) = 1$ und $\dim E_A(1) = 2$ ergibt sich $E_A(1) = \operatorname{lin}(v_2, v_3)$.

Folglich ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A gegeben durch $\frac{1}{\|v_1\|}\, v_1$, $\frac{1}{\|v_2\|}\, v_2, \frac{1}{\|v_3\|}\, v_3$, also durch

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

orthogonal und es gilt

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Das lineare Gleichungssystem $Ax = 2x$ hat die triviale Lösung $x = 0$. Würde $Ax = 2x$ für ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gelten, dann wäre 2 ein Eigenwert von A, was aber nach **a)** nicht der Fall ist. Folglich ist $x = 0$ die einzige Lösung von $Ax = 2x$.

c) Ist $D := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gesetzt, so gilt gemäß **a)**: $S^{-1}AS = D$ bzw. $A = SDS^{-1}$ $(*)$.

Hieraus folgt $A^k = SD^kS^{-1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Beweis durch Induktion:

IA: $A^1 = SD^1S^{-1}$ gilt nach $(*)$.

IS: Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $A^k = SD^kS^{-1}$ (IV). Dann folgt:

$$A^{k+1} = AA^k \overset{(*),\,(\mathrm{IV})}{=} (SDS^{-1})(SD^kS^{-1}) = SD(S^{-1}S)D^kS^{-1} = SD^{k+1}S^{-1}.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ erhält man $D^k = \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und somit

$$A^k = SD^kS^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4^k}{\sqrt{3}} & \frac{4^k}{\sqrt{3}} & \frac{4^k}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4^k+2}{3} & \frac{4^k-1}{3} & \frac{4^k-1}{3} \\ \frac{4^k-1}{3} & \frac{4^k+2}{3} & \frac{4^k-1}{3} \\ \frac{4^k-1}{3} & \frac{4^k-1}{3} & \frac{4^k+2}{3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24

Es gilt

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.}Z_2]} (\alpha - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$=_{[\text{Entw.}Z_1]} (\alpha-\lambda)(-\lambda)\det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\alpha-\lambda)^2\lambda^2.$$

Fall 1: $\alpha = 0$. Dann ist $\lambda = 0$ einziger Eigenwert von A mit der algebraischen Vielfachheit 4. Für den zugehörigen Eigenraum $E_A(0)$ ergibt sich

$$E_A(0) = \mathrm{Kern}(A - 0I_4) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Also ist $\dim E_A(0) = 2 \neq 4$ und somit ist A in diesem Fall nicht diagonalisierbar.

Fall 2: $\alpha \neq 0$. Dann sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \alpha$ jeweils Eigenwerte von A mit der algebraischen Vielfachheit 2. Um $\dim E_A(0)$ zu ermitteln, könnte man wie im vorigen Fall $E_A(0)$ explizit angeben und die Dimension ablesen. Alternativ schließen wir aus

$$\dim \mathrm{Bild}(A - 0I_4) = \mathrm{rg}(A - 0I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

mit der Dimensionsformel $\dim E_A(0) = \dim \mathrm{Kern}(A - 0I_4) = \dim \mathbb{C}^4 - \dim \mathrm{Bild}(A - 0I_4) = 4 - 2 = 2$. Somit stimmt für den Eigenwert 0 geometrische und algebraische Vielfachheit überein.

Ferner ist

$$\dim \operatorname{Bild}(A-\alpha I_4) = \operatorname{rg}(A-\alpha I_4) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \overset{\alpha\neq 0}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4, \end{cases}$$

woraus

$$\dim E_A(\alpha) = 4 - \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4 \end{cases}$$

folgt. Also ist nur für $\alpha = 4$ geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts α identisch.

Fazit: A ist genau für $\alpha = 4$ diagonalisierbar.

Aufgabe 25

Wir berechnen das charakteristische Polynom von A: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4\to Z_4-Z_2}\right]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2\to S_2+S_4]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_4]} (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2\to S_2-S_3]} (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_3]} (4-\lambda)^2\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2\big((3-\lambda)(1-\lambda)-3\big) = (4-\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda) = \lambda(\lambda-4)^3.$$

Die Matrix A besitzt also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3). Wir bestimmen nun die Eigenräume:
Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das lineare Gleichungssystem $(A - 0I_4)x = 0$, also $Ax = 0$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4\to Z_4-Z_2}]{Z_1\to Z_1-3Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4\to Z_4+Z_3]{Z_1\to Z_1+2Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir $x_4 \in \mathbb{C}$ beliebig, so folgt aus der ersten/letzten Zeile $x_3 = -x_4$, aus der dritten $x_2 = x_4$ und aus der zweiten dann $x_1 = -x_4$. Wir haben also den eindimensionalen Eigenraum

$$E_A(0) = \{\begin{pmatrix} -x_4 \\ x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{C}\} = \operatorname{lin}(c_1)\,, \qquad \text{wobei} \quad c_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt zu $\lambda_2 = 4$:

$$A - 4I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3\to Z_3-Z_1 \\ Z_4\to Z_4+Z_1}]{Z_2\to Z_2+Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1\to -Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_A(4) = \operatorname{lin}(c_2, c_3, c_4)\,, \qquad c_2 := \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad c_3 := \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad c_4 := \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist als reelle, symmetrische Matrix diagonalisierbar (Alternativ könnte man mit den geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte argumentieren). Da c_1 eine Basis von $E_A(0)$ und c_2, c_3, c_4 eine Basis von $E_A(4)$ ist, gilt für die Matrix S mit den Spalten c_1, c_2, c_3, c_4

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}.$$

Da $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ symmetrisch ist, gibt es sogar eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$P^T AP = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Um ein solches P anzugeben, bestimmen wir jeweils eine Orthonormalbasis der Eigenräume. Eine Orthonormalbasis von $E_A(0)$ ist z.B. gegeben durch $b_1 := \frac{1}{\|c_1\|}\, c_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $E_A(4)$ verwenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren:

$$b_2 := \frac{1}{\|c_2\|}\, c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$v_3 := c_3 - \langle c_3, b_2\rangle b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$b_3 := \frac{1}{\|v_3\|}\, v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$v_4 := c_4 - \langle c_4, b_2\rangle b_2 - \langle c_4, b_3\rangle b_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$b_4 := \frac{1}{\|v_4\|}\, v_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

Somit bildet b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $E_A(4)$.
Besitzt die Matrix P die Spalten b_1, b_2, b_3, b_4, dann ist P orthogonal (d.h. $P^{-1} = P^T$) und es gilt

$$P^T AP = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26

a) **i)** Setze zum Beispiel $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wegen

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^3 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 5$$

ist 5 der einzige Eigenwert von A.

ii) Setze zum Beispiel $B := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ mit paarweise verschiedenen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dann sind a, b, c, d die Eigenwerte der Diagonalmatrix B. Nach Voraussetzung sind diese reell und paarweise verschieden.

iii) Es ist $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)$. Wegen $\chi_C(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \{0, -1, 1, -2, 2\}$ sind $0, -1, 1, -2, 2$ die Eigenwerte von C.

Somit hat zum Beispiel $C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ die geforderte Eigenschaft.

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und λ ein Eigenwert von A, d.h. es gibt $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$. Dann gilt

$$(A^2 + 5I_n)x = A^2x + 5I_nx = A(Ax) + 5x = A(\lambda x) + 5x = \lambda Ax + 5x = \lambda\lambda x + 5x = (\lambda^2 + 5)x\,,$$

d.h. $\lambda^2 + 5$ ist ein Eigenwert von $A^2 + 5I_n$ und x ein zugehöriger Eigenvektor.

Bemerkung: Ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so gilt $A^n x = \lambda^n x$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dies bestätigen wir mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

IA ($n = 1$): $Ax = \lambda x$ gilt nach Voraussetzung.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $A^n x = \lambda^n x$ (IV). Dann folgt:

$$A^{n+1}x = A(A^n x) \stackrel{\text{(IV)}}{=} A(\lambda^n x) = \lambda^n Ax = \lambda^n \lambda x = \lambda^{n+1}x.$$

Damit ergibt sich für ein beliebiges Polynom $p(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n t^n$ ($N \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$)

$$p(A)x = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n x = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n x = p(\lambda)x.$$

(Hierbei ist $A^0 := I_n$ gesetzt.) Also ist x ein Eigenvektor von $p(A)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$.

c) Die Aussage "Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt mindestens einen reellen Eigenwert" ist i.a. falsch. Beispielsweise hat die reelle Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wegen $\chi_B(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$ nur die nicht-reellen Eigenwerte $i, -i$.

Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2012
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 27

Für die symmetrische Matrix $A_\beta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ verwenden wir das Kriterium von Hurwitz. Es gilt

$$\det\begin{pmatrix}1\end{pmatrix} = 1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 8\end{pmatrix} = 8-4 = 4 > 0\,;$$

die ersten beiden Hauptunterdeterminanten sind also positiv. Die Matrix A_β ist somit genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante größer als Null ausfällt. Wegen

$$\det\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 8 & \beta\\ 0 & \beta & 1\end{pmatrix} =_{[Z_2\to Z_2+2Z_1]} \det\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 4 & \beta\\ 0 & \beta & 1\end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } S_1]} \det\begin{pmatrix}4 & \beta\\ \beta & 1\end{pmatrix} = 4-\beta^2$$

ergibt sich: A_β ist positiv definit $\iff 0 < 4-\beta^2 \iff |\beta| < 2 \iff -2 < \beta < 2$.

Nun zur Matrix B: Für $n = 1$ ist $B = (1) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ positiv definit. Im Fall $n \geqslant 2$ ist

$$B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 2 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 2 & 1 & 2 & 0\\ \vdots & & & 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Für $x := e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$Bx = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad x^T Bx = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = 1 > 0,$$

während sich für $y := e_1 - e_2 = (1, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$By = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad y^T By = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = -2 < 0$$

ergibt. Somit ist die Matrix B indefinit.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ im Fall $n \geqslant 2$ nicht positiv definit ist, kann man auch mit dem Kriterium von Hurwitz argumentieren: Da für die zweite Hauptunterdeterminante $\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = 1-4 = -3 < 0$ gilt, ist B nicht positiv definit.

Aufgabe 28

a) **i)** Für $x > 0$ setze $a(x) = x + \frac{2}{x}$. Dann ist $a\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und eine Stammfunktion A von a lautet

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int x + \frac{2}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,x^2 + 2\ln(|x|) = \frac{1}{2}x^2 + \ln(x^2)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

Gemäß Beispiel (1) in 4.3 sind die Lösungen von $y' = a(x)y$ gegeben durch

$$y(x) = ce^{A(x)} = cx^2 e^{x^2/2}\,, \qquad x \in (0,\infty)\,,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

ii) Hier handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Die Lösungen y_H der homogenen Gleichung $y' = 2xy$ sind $y_H(x) = ce^{\int 2x\,dx} = ce^{x^2}$ für $c \in \mathbb{R}$. Die Lösungen y der inhomogenen Gleichung $y' = 2xy + x$ kann man mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel aus Abschnitt 4.4 erhalten

$$y(x) = ce^{x^2} + e^{x^2} \int e^{-x^2} x\,dx \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}\,.$$

Wegen

$$\int e^{-x^2} x\,dx = -\tfrac{1}{2} \int e^{-x^2}(-2x)\,dx = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2}$$

ist

$$y(x) = ce^{x^2} + e^{x^2}\left(-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\right) = ce^{x^2} - \tfrac{1}{2} \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}\,.$$

b) **i)** Die gegebene Gleichung $y' = e^x e^{-y} e^{-e^y}$ ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Wir lösen das Anfangswertproblem $y' = e^x e^{-y} e^{-e^y}$, $y(1) = 0$ mit der in Abschnitt 4.3 vorgestellten Methode [$f(x) = e^x$, $g(y) = e^{-y}e^{-e^y}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$]. Wegen $g(y_0) = e^{-1} \neq 0$ ist die Lösung gegeben durch

$$\int_0^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_1^x f(t)\,dt.$$

Für das Integral auf der linken Seite ergibt sich

$$\int_0^{y(x)} e^{\eta} e^{e^{\eta}}\,d\eta = \left[e^{e^{\eta}}\right]_{\eta=0}^{y(x)} = e^{e^{y(x)}} - e,$$

das Integral auf der rechten Seite ist gleich

$$\int_1^x f(t)\,dt = \left[e^t\right]_{t=1}^x = e^x - e.$$

Dies führt auf $e^{e^{y(x)}} = e^x$. Somit ist $y(x) = \ln(\ln(e^x)) = \ln x$ die auf $(0,\infty)$ definierte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

ii) Die zugehörige homogene Gleichung $y' + y\cos x = 0$ bzw. $y' = -(\cos x)y$ hat nach Beispiel (1) in 4.3 die allgemeine Lösung

$$y_H(x) = ce^{\int -\cos x\,dx} = ce^{-\sin x} \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

Um eine spezielle Lösung y_P der inhomogenen Gleichung $y' + y\cos x = \sin x\,\cos x$ zu finden, machen wir den Ansatz $y_P(x) = c(x)e^{-\sin x}$ (Variation der Konstanten). Dann haben wir

$$y_P'(x) + y_P(x)\cos x = \left(c'(x)e^{-\sin x} - c(x)e^{-\sin x}\cos x\right) + c(x)e^{-\sin x}\cos x = c'(x)e^{-\sin x}\,.$$

Somit ist y_P eine Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn $c'(x)e^{-\sin x} = \sin x\,\cos x$ gilt, d.h. wir suchen eine Funktion c mit

$$c'(x) = \sin x\,\cos x\,e^{\sin x}\,.$$

Partielle Integration (mit $u(x) = \sin x$ und $v'(x) = (\cos x)e^{\sin x}$) liefert

$$c(x) = (\sin x)e^{\sin x} - \int (\cos x)e^{\sin x}\,dx = (\sin x)e^{\sin x} - e^{\sin x} + C = (\sin x - 1)e^{\sin x} + C \quad \text{für } C \in \mathbb{R}.$$

Wir wählen beispielsweise $C = 0$ und erhalten als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y_P(x) = c(x)e^{-\sin x} = \sin x - 1\,.$$

Die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung $y' + y\cos x = \sin x\,\cos x$ bekommen wir, indem wir zu einer speziellen Lösung des inhomogenen Problems y_P die allgemeine Lösung y_H des homogenen Problems addieren:

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) = \sin x - 1 + ce^{-\sin x} \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

Hier gilt $y(0) = -1 + c$. Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ist daher nur für $c = 2$ erfüllt; das Anfangswertproblem hat folglich die eindeutige Lösung $y(x) = \sin x - 1 + 2e^{-\sin x}$.

Bemerkung: Man könnte hier natürlich auch die Variation-der-Konstanten-Formel verwenden.

Aufgabe 29

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} i'(t) &= -\frac{R}{L}\,i(t) + \frac{1}{L}\,u(t), \\ i(0) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

lösen wir mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel aus Abschnitt 4.4 [mit $y = i$, $x = t$, $x_0 = y_0 = 0$, $I = [0,\infty)$, $a(t) = -\frac{R}{L}$, $b(t) = \frac{1}{L}\,u(t) = \frac{A}{L}\,\sin(\omega t)$]. Danach ist die eindeutige Lösung von (1) gegeben durch

$$\begin{aligned} i(t) &= 0 \cdot e^{\int_0^t -\frac{R}{L}\,ds} + e^{\int_0^t -\frac{R}{L}\,ds} \cdot \int_0^t e^{-\int_0^\tau -\frac{R}{L}\,ds}\,\frac{A}{L}\,\sin(\omega\tau)\,d\tau \\ &= \frac{A}{L}\,e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau, \qquad t \in [0,\infty). \end{aligned} \tag{2}$$

Zur Berechnung des Integrals verwenden wir zweimalige partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau &= \left[e^{\frac{R}{L}\tau}\frac{-\cos(\omega\tau)}{\omega}\right]_{\tau=0}^t + \int_0^t \frac{R}{L}\,e^{\frac{R}{L}\tau}\,\frac{\cos(\omega\tau)}{\omega}\,d\tau \\ &= -e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{R}{\omega L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\cos(\omega\tau)\,d\tau \\ &= -e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{R}{\omega L}\left(\left[e^{\frac{R}{L}\tau}\,\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\right]_{\tau=0}^t - \int_0^t \frac{R}{L}\,e^{\frac{R}{L}\tau}\,\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\,d\tau\right) \\ &= -e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{R}{\omega L}\,e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \frac{R^2}{\omega^2L^2}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau &= -e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{R}{\omega^2L}\,e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t) \\ &= \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\omega^2L}\big(R\sin(\omega t) - \omega L\cos(\omega t)\big) + \frac{1}{\omega} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau &= \frac{\frac{1}{\omega^2L}}{1 + \frac{R^2}{\omega^2L^2}}\,e^{\frac{R}{L}t}\big(R\sin(\omega t) - \omega L\cos(\omega t)\big) + \frac{\frac{1}{\omega}}{1 + \frac{R^2}{\omega^2L^2}} \\ &= \frac{L}{\omega^2L^2 + R^2}\,e^{\frac{R}{L}t}\big(R\sin(\omega t) - \omega L\cos(\omega t)\big) + \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2 + R^2} \end{aligned}$$

folgt. Einsetzen in (2) ergibt für $t \geqslant 0$

$$i(t) = \frac{A}{\omega^2L^2 + R^2}\big(R\sin(\omega t) - \omega L\cos(\omega t)\big) + \frac{\omega AL}{\omega^2L^2 + R^2}\,e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Aufgabe 30

a) Das charakteristische Polynom der Gleichung $y''+4y'-5y=0$, also $\lambda^2+4\lambda-5=(\lambda-1)(\lambda+5)$, besitzt die einfachen Nullstellen 1 und -5. Daher ist $e^x,\ e^{-5x}$ ein Fundamentalsystem, d.h. $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-5x}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, ist die allgemeine Lösung von $y''+4y'-5y=0$.

b) Hier lautet das zugehörige charakteristische Polynom $\lambda^2-6\lambda+25$. Dieses hat die einfachen Nullstellen $3\pm 4i$. Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch $e^{3x}\sin(4x),\ e^{3x}\cos(4x)$, so dass die allgemeine Lösung von $y''-6y'+25y=0$ durch $y(x)=c_1e^{3x}\sin(4x)+c_2e^{3x}\cos(4x)$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, gegeben ist.

c) Das charakteristische Polynom von $y'''-y''+y'-y=0$ ist $\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=(\lambda-1)(\lambda^2+1)=(\lambda-1)(\lambda+i)(\lambda-i)$. Da dieses die einfachen Nullstellen $1,-i,i$ besitzt, ist $e^x,\ \sin x,\ \cos x$ ein zugehöriges Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung von $y'''-y''+y'-y=0$ lautet folglich $y(x)=c_1e^x+c_2\sin x+c_3\cos x$, wobei $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind.

d) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y''''-y'''+4y''-4y'=0$ lautet $\lambda^4-\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda=\lambda(\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4)=\lambda(\lambda-1)(\lambda^2+4)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)$ und besitzt die einfachen Nullstellen $0,1,-2i,2i$. Deshalb ist $1,\ e^x,\ \sin(2x),\ \cos(2x)$ ein Fundamentalsystem und für die allgemeine Lösung von $y''''-y'''+4y''-4y'=0$ ergibt sich $y(x)=c_1+c_2e^x+c_3\sin(2x)+c_4\cos(2x)$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$.

e) Hier ist das charakteristische Polynom gleich λ^4+1. Aufgrund von

$$\begin{aligned}\lambda^4=-1 \quad&\iff\quad \lambda^2=i \text{ oder } \lambda^2=-i \quad\iff\quad \lambda^2=e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ oder } \lambda^2=e^{-i\frac{\pi}{2}}\\ &\iff\quad \lambda=e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda=-e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda=e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda=-e^{-i\frac{\pi}{4}}\\ &\iff\quad \lambda=\tfrac{1+i}{\sqrt2} \text{ oder } \lambda=\tfrac{-1-i}{\sqrt2} \text{ oder } \lambda=\tfrac{1-i}{\sqrt2} \text{ oder } \lambda=\tfrac{-1+i}{\sqrt2}\end{aligned}$$

sind $\frac{1+i}{\sqrt2},\frac{1-i}{\sqrt2},\frac{-1+i}{\sqrt2},\frac{-1-i}{\sqrt2}$ die (einfachen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Damit ist $e^{x/\sqrt2}\sin(x/\sqrt2),\ e^{x/\sqrt2}\cos(x/\sqrt2),\ e^{-x/\sqrt2}\sin(x/\sqrt2),\ e^{-x/\sqrt2}\cos(x/\sqrt2)$ ein Fundamentalsystem von $y^{(4)}+y=0$ und die allgemeine Lösung lautet $y(x)=c_1e^{x/\sqrt2}\sin(x/\sqrt2)+c_2e^{x/\sqrt2}\cos(x/\sqrt2)+c_3e^{-x/\sqrt2}\sin(x/\sqrt2)+c_4e^{-x/\sqrt2}\cos(x/\sqrt2)$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$.

Aufgabe 31

a) Die homogene Gleichung $y'''-y=0$ besitzt das charakteristische Polynom

$$p(\lambda)=\lambda^3-1=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$$

mit den jeweils einfachen Nullstellen $\lambda_1=1$ und $\lambda_{2,3}=-\frac12\pm\frac12\sqrt3\,i$. Somit ist

$$\phi_1(x)=e^{\lambda_1x}=e^x\,,\qquad \phi_2(x)=e^{-x/2}\cos\big(\tfrac12\sqrt3\,x\big)\,,\qquad \phi_3(x)=e^{-x/2}\sin\big(\tfrac12\sqrt3\,x\big)$$

ein zugehöriges Fundamentalsystem, und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet $y_H=c_1\phi_1+c_2\phi_2+c_3\phi_3$ mit $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$. Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung die Gestalt $q(x)e^{0x}$ hat, wobei q ein Polynom vom Grad 2 ist, und 0 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p ist, können wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung mit dem Ansatz $y_P(x)=ax^2+bx+c$ für gewisse $a,b,c\in\mathbb{R}$ erhalten. Dieser liefert

$$y_P'''(x)-y_P(x)=0-(ax^2+bx+c)\overset{!}{=}1+x^2\,,$$

und wir schließen $a=-1$, $b=0$ und $c=-1$, bekommen also $y_P(x)=-x^2-1$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $y'''-y=1+x^2$ lautet somit

$$y(x)=y_H(x)+y_P(x)=c_1e^x+e^{-x/2}\Big(c_2\cos\big(\tfrac12\sqrt3\,x\big)+c_3\sin\big(\tfrac12\sqrt3\,x\big)\Big)-x^2-1\qquad(c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}).$$

b) Hier hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ die einfachen Nullstellen 1 und -1, d. h. die homogene Gleichung besitzt die allgemeine Lösung $y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist diesmal von der Form $q(x)e^{2x}$ mit einem Polynom q vom Grad 1. Da 2 keine Nullstelle von p ist, machen wir den Ansatz $y_P(x) = (ax+b)e^{2x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Es gilt dann

$$y_P'(x) = ae^{2x} + 2(ax+b)e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x}\,,$$
$$y_P''(x) = 2ae^{2x} + 2(2ax + a + 2b)e^{2x} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x}\,,$$

und damit ergibt sich

$$y_P(x)'' - y_P(x) = (4ax + 4a + 4b)e^{2x} - (ax+b)e^{2x} = (3ax + 4a + 3b)e^{2x} \stackrel{!}{=} xe^{2x}\,.$$

Koeffizientenvergleich führt auf $a = \frac{1}{3}$ und $b = -\frac{4}{9}$, so dass $y_P(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})e^{2x}$ ist. Damit erhält man als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{4}{9})e^{2x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

c) Die homogene Gleichung haben wir schon in **b)** behandelt. Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung diesmal xe^{1x} lautet und 1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p mit Vielfachheit $\nu = 1$ ist, reicht es hier nicht, einen Ansatz der Form $(ax+b)e^x$ zu machen; vielmehr muss man $y_P(x) = x^\nu(ax+b)e^x = (ax^2 + bx)e^x$ für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten. Dann ist

$$y_P'(x) = (2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x = \big(ax^2 + (2a+b)x + b\big)e^x\,,$$
$$y_P''(x) = (2ax + 2a + b)e^x + \big(ax^2 + (2a+b)x + b\big)e^x = \big(ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b\big)e^x\,,$$

d. h. mit diesem Ansatz hat man

$$y_P''(x) - y_P(x) = \big(ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b - ax^2 - bx\big)e^x = (4ax + 2a + 2b)e^x \stackrel{!}{=} xe^x\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{4}$ und $b = -\frac{1}{4}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \tfrac{1}{4}(x^2 - x)e^x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Damit ergibt sich $y(0) = c_1 + c_2$ und $y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + \frac{1}{4}(2x-1)e^x + \frac{1}{4}(x^2-x)e^x$, also $y'(0) = c_1 - c_2 - \frac{1}{4}$. Beides soll Null ergeben, das bedeutet $c_1 = -c_2$ und $2c_1 - \frac{1}{4} = 0$, also $c_1 = -c_2 = \frac{1}{8}$. Das Anfangswertproblem hat somit die (eindeutig bestimmte) Lösung

$$y(x) = \tfrac{1}{8}e^x - \tfrac{1}{8}e^{-x} + \tfrac{1}{4}(x^2 - x)e^x = \tfrac{1}{8}(2x^2 - 2x + 1)e^x - \tfrac{1}{8}e^{-x}\,.$$

d) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$ hat die einfachen Nullstellen $0, 1$ und 3, d.h. die homogene Gleichung $y''' - 4y'' + 3y' = 0$ besitzt

$$y_H(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^x + c_3 e^{3x} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

als allgemeine Lösung. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist von der Form

$$\big(2\cos(1x) + 4\sin(1x)\big)e^{0x}\,.$$

Da $0 + 1i$ keine Nullstelle von p ist, können wir als Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y_P(x) = a\cos(1x) + b\sin(1x)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ wählen. Es gilt dann

$$y_P'(x) = -a\sin x + b\cos x\,, \qquad y_P''(x) = -a\cos x - b\sin x\,, \qquad y_P'''(x) = a\sin x - b\cos x\,,$$

und damit ergibt sich

$$y_P'''(x) - 4y_P''(x) + 3y_P'(x) = (a + 4b - 3a)\sin x + (-b + 4a + 3b)\cos x \stackrel{!}{=} 2\cos x + 4\sin x\,.$$

Dies liefert die beiden Gleichungen $-2a + 4b = 4$ und $4a + 2b = 2$, also $a = 0$ und $b = 1$. Somit haben wir als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $y_P(x) = \sin x$ und als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{3x} + \sin x \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

Bemerkung: Mit $z := y'$ könnte man auch $z'' - 4z' + 3z = 2\cos x + 4\sin x$ betrachten und die ermittelte Lösung z dann noch integrieren.

Aufgabe 32

Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0\,, \tag{$*$}$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $z_1 := y$, $z_2 := y', \ldots, z_n := y^{(n-1)}$ und setzen

$$z(x) := \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Erfüllt y die Gleichung ($*$), so ist z eine Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung und umgekehrt:

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= y'(x) = z_2(x)\,, \\ z_2'(x) &= y''(x) = z_3(x)\,, \\ &\vdots \\ z_{n-1}'(x) &= y^{(n-1)}(x) = z_n(x)\,, \\ z_n'(x) &= y^{(n)}(x) = -a_0 y(x) - a_1 y'(x) - \ldots - a_{n-1}y^{(n-1)}(x) \\ &= -a_0 z_1(x) - a_1 z_2(x) - \ldots - a_{n-1} z_n(x)\,, \end{aligned}$$

also

$$z'(x) = \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}'(x) \\ z_n'(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A \in \mathbb{R}^{n\times n}} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}(x) \\ z_n(x) \end{pmatrix} = Az(x)\,.$$

Nun sei $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir rechnen per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$ nach

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\,. \tag{$+$}$$

IA: Für $n = 1$ gilt $A = \begin{pmatrix} -a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ und daher $\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda + a_0 \end{pmatrix} = \lambda + a_0$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n sei ($+$) erfüllt (IV). Entwickeln nach der ersten Spalte ergibt

$$\begin{aligned} \det \underbrace{(\lambda I - A)}_{\in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}} &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & & & \\ & \lambda & -1 & & & \\ & & \lambda & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \lambda + a_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \lambda + a_n \end{pmatrix} + (-1)^{n+2} a_0 \det \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{IV}}{=} \lambda(\lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda + a_1) + (-1)^{n+2}a_0(-1)^n \\ &= \lambda^{n+1} + a_n\lambda^n + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\,. \end{aligned}$$

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

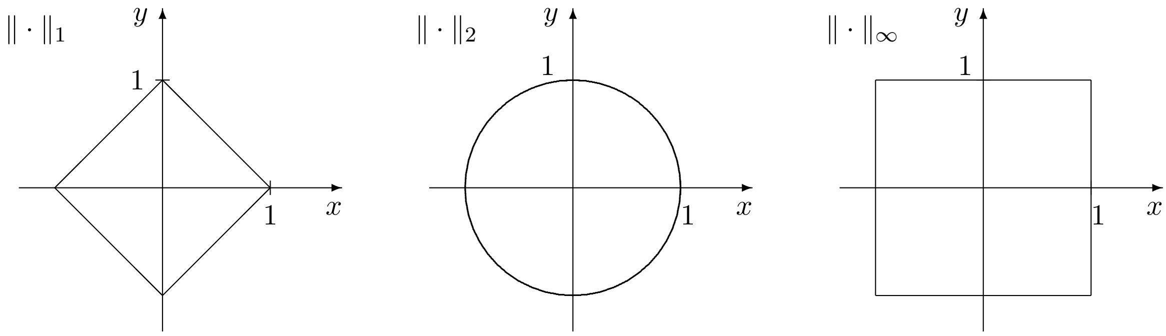
Sommersemester 2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 33

a)



b) **i)** Es sei $p \in [1, \infty)$. Um zu zeigen, dass die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent sind, muss man Konstanten $c_1, c_2 > 0$ so angeben, dass

$$c_1 \|x\|_p \leqslant \|x\|_\infty \leqslant c_2 \|x\|_p \tag{$*$}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann findet man ein $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ mit $|x_{j_0}| = \max\{|x_j| \,:\, j = 1, \ldots, n\} = \|x\|_\infty$. Damit erhält man

$$\|x\|_\infty = |x_{j_0}| = \big(|x_{j_0}|^p\big)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p \,.$$

Andererseits gilt

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^n \max\big\{|x_j|^p \,:\, j = 1, \ldots, n\big\}\right)^{1/p} = \big(n\|x\|_\infty^p\big)^{1/p} = n^{1/p}\|x\|_\infty \,.$$

Also ist die Ungleichung $(*)$ erfüllt mit den (von x unabhängigen) Konstanten $c_1 = n^{-1/p}$ und $c_2 = 1$, so dass die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ tatsächlich äquivalent sind.

ii) Nun seien $p, q \in [1, \infty]$.

Im Fall $p = q = \infty$ ist nichts zu zeigen.

Im Fall $p = \infty \neq q$ oder $q = \infty \neq p$ haben wir die Äquivalenz von $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ bereits in Teil **i)** gezeigt.

Es verbleibt der Fall $p \neq \infty$ und $q \neq \infty$. Gemäß **i)** sind $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ bzw. $\|\cdot\|_q$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent, d.h. es gibt Konstanten $c_1, \widetilde{c}_1, c_2, \widetilde{c}_2 > 0$ mit

$$c_1\|x\|_p \leqslant \|x\|_\infty \leqslant c_2\|x\|_p \qquad \text{und} \qquad \widetilde{c}_1\|x\|_q \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \widetilde{c}_2\|x\|_q \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \,.$$

Hieraus folgt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{c_1}{\widetilde{c}_2}\,\|x\|_p \leqslant \frac{1}{\widetilde{c}_2}\,\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_q \leqslant \frac{1}{\widetilde{c}_1}\,\|x\|_\infty \leqslant \frac{c_2}{\widetilde{c}_1}\,\|x\|_p \,.$$

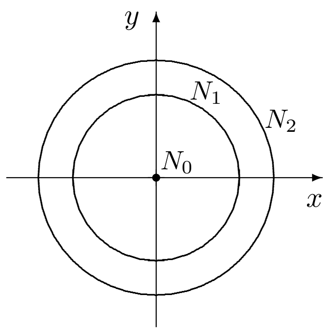
Demnach sind auch in diesem Fall die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ äquivalent.

Aufgabe 34

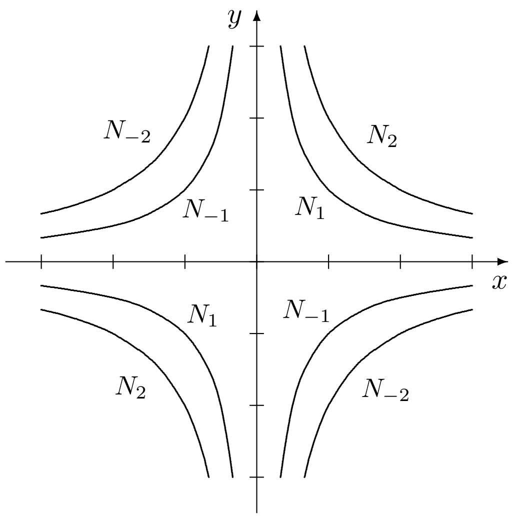
• Die Niveaulinie $N_c(f)$ ergibt sich aus der Gleichung $f(x,y) = c$, also

$$x^2 + y^2 = c\,.$$

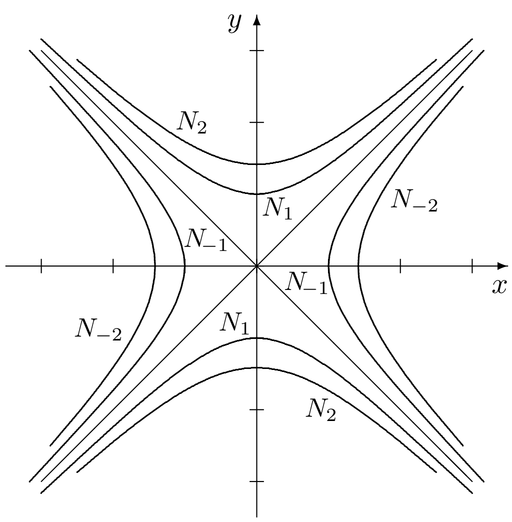
Für $c < 0$ erhalten wir die leere Menge, für $c = 0$ nur den Nullpunkt und für $c > 0$ eine Kreislinie um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{c}$. Dies ergibt die folgende Skizze, wobei die kleinere Kreislinie den Radius 1 und die größere den Radius $\sqrt{2}$ hat:



• Die Gleichung $xy = c$ hat für $c = 0$ die Lösungsmenge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ oder } y = 0\}$. Für $c \neq 0$ erhält man das Schaubild der Funktion $y = c/x$, die Niveaulinien sind also Hyperbeln. Die Skizze sieht wie folgt aus, wobei N_0 aus den beiden Achsen besteht:



• Hier erhalten wir die Gleichung $y^2 = c + x^2$, also $|y| = \sqrt{c + x^2}$ bzw. $y = \pm\sqrt{c + x^2}$. Es ergibt sich das folgende Bild, wobei N_0 aus den beiden Winkelhalbierenden besteht:



Bemerkung: Wegen $h(x,y) = (y-x)(y+x)$ erhalten wir das gleiche Bild wie bei der Funktion g, allerdings gedreht und mit anderen Längen.

Aufgabe 35

a) Für jedes $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2+1)-1} \\ &= \sqrt{x^2+y^2+1}+1 \end{aligned}$$

und somit ergibt sich (wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion)

$$f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{0^2+0^2+1}+1 = 2\,.$$

Bemerkung: Da der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert, lässt sich die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ zu einer stetigen Funktion $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fortsetzen mit

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 2 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b) Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x,0) = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0 \qquad \text{und} \qquad f(x,x) = \frac{x^2}{e^{x^2}-1} \xrightarrow{x\to 0} \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t-1} = 1\,,$$

d.h. bei unterschiedlicher Annäherung an den Nullpunkt erhält man verschiedene Werte. Folglich existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.

Aufgabe 36

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist f auch stetig: Mit Hilfe von $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ [Diese Ungleichung folgt aus der binomischen Formel: $0 \leqslant (|x|-|y|)^2 = x^2 - 2|xy| + y^2 \Rightarrow |xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$] ergibt sich für jedes $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}\,|y| \leqslant \tfrac{1}{2}\,|y| \to 0 \qquad \text{für } (x,y) \to (0,0),$$

also gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, d.h. f ist stetig in $(0,0)$.

Alternativ: Sei $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ und $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte $r_n > 0$ und $\phi_n \in [0,2\pi)$ mit $(x_n,y_n) = (r_n\cos\phi_n, r_n\sin\phi_n)$. Ferner führt $(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ auf $r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Damit gilt

$$f(x_n,y_n) = f(r_n\cos\phi_n, r_n\sin\phi_n) = \frac{(r_n\cos\phi_n)(r_n\sin\phi_n)^2}{(r_n\cos\phi_n)^2+(r_n\sin\phi_n)^2} = r_n\cos\phi_n\,\sin^2\phi_n\,,$$

also $|f(x_n,y_n)| \leqslant r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Es folgt $f(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und daher $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

b) Die Funktion g ist nicht stetig in $(0,0)$, denn es gilt $(1/n^2, 1/n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$, aber

$$g(1/n^2,1/n) = \frac{1/n^4}{1/n^4+1/n^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)\,.$$

Sei nun $\phi \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Im Fall $\cos\phi = 0$ ist $g(r\cos\phi, r\sin\phi) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 = g(0,0)$. Im Fall $\cos\phi \neq 0$ ergibt sich

$$g(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{r^3\cos\phi\,\sin^2\phi}{r^2\cos^2\phi + r^4\sin^4\phi} = \frac{r\cos\phi\,\sin^2\phi}{\cos^2\phi + r^2\sin^4\phi} \xrightarrow{r\to 0} \frac{0}{\cos^2\phi + 0} = 0 = g(0,0)\,.$$

c) Wegen $h(x,x) = 1 \to 1 \neq 0 = h(0,0)$ für $x \to 0$ ist die Funktion h in $(0,0)$ nicht stetig.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{y^2}{y^2+(1-y/x)^2} \xrightarrow{y\to 0} \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

Folglich existiert $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} h(x,y)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = h(0,0)$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert auch der andere iterierte Limes und hat den gleichen Wert.

Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2012
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 37

a) Wegen

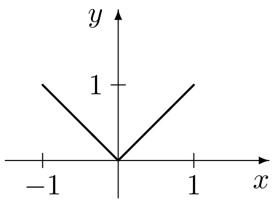
$$\gamma(t) = (t,\, |t|) = \begin{cases} (t,\, -t) & \text{für } t \in [-1,0) \\ (t,\, t) & \text{für } t \in [0,1] \end{cases}$$

ist

$$\dot\gamma(t) = \begin{cases} (1,\, -1) & \text{für } t \in (-1,0) \\ (1,\, 1) & \text{für } t \in (0,1) \end{cases}$$

und für die Länge der Kurve γ (bzgl. der Euklid-Norm $\|\cdot\|_2$) ergibt sich

$$L(\gamma) = \int_{-1}^{1} \|\dot\gamma(t)\|_2\, dt = \int_{-1}^{0} \|(1,-1)\|_2\, dt + \int_0^1 \|(1,1)\|_2\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\,.$$

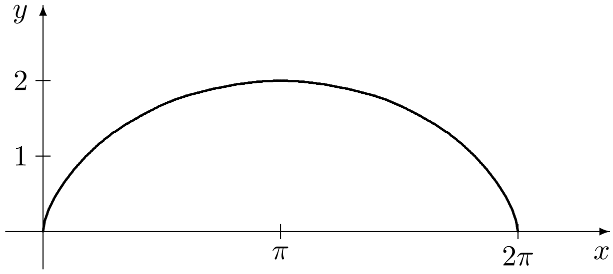


b) Für jedes $t \in [0, 2\pi]$ gilt $\dot\gamma(t) = (1-\cos t, \sin t)$ und damit

$$\begin{aligned}\|\dot\gamma(t)\|_2^2 &= (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t \\ &= 2\big(1 - \cos(\tfrac12 t + \tfrac12 t)\big) = 2\big(1 - \cos^2(\tfrac12 t) + \sin^2(\tfrac12 t)\big) = 4\sin^2(\tfrac12 t)\,.\end{aligned}$$

Definitionsgemäß ergibt sich also für die Länge von γ (bzgl. der Euklid-Norm $\|\cdot\|_2$)

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot\gamma(t)\|_2\, dt = \int_0^{2\pi} 2|\sin(\tfrac12 t)|\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sin(\tfrac12 t)\, dt = -4\cos(\tfrac12 t)\Big|_{t=0}^{2\pi} = 8\,.$$



Bemerkung: Diese Kurve heißt *Zykloide*. Sie ist die Bahn, die ein Kreispunkt beim Abrollen eines Kreises auf einer Geraden beschreibt.

c) Hier befinden wir uns in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, welche wir als $\mathbb{R}^2$ auffassen. Wegen $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ist die Kurve $\gamma(\varphi) = (\varphi\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, in $\mathbb{R}^2$ gemeint.

Mit

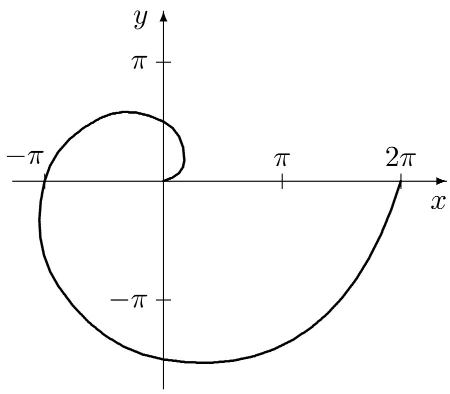
$$\dot\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} (\varphi\cos\varphi)' \\ (\varphi\sin\varphi)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi - \varphi\sin\varphi \\ \sin\varphi + \varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

ergibt sich für jedes $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \|\dot\gamma(\varphi)\|_2^2 &= (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)^2 \\ &= \cos^2\varphi - 2\varphi\cos\varphi\,\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\cos\varphi\,\sin\varphi + \varphi^2\cos^2\varphi \\ &= 1 + \varphi^2 \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\dot\gamma(\varphi)\|_2\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+\varphi^2} + \sqrt{1+\varphi^2}}{2}\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2} \right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2} \right)\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{1}{2}\operatorname{Arsinh}(2\pi) + \pi\sqrt{1+4\pi^2}\,. \end{aligned}$$



Bemerkung: Diese Kurve heißt *Archimedische Spirale*.

Aufgabe 38

Für alle $t \in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2]$ gilt

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t^2} \\ 1 \\ -t/\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \neq \vec{0}\,.$$

Also ist γ eine reguläre Kurve. Für jedes $t \in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2]$ haben wir

$$\psi(t) := \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{t} \|\dot\gamma(\tau)\|_2\,d\tau = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{t} \sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}}\,d\tau = \sqrt{2}\arcsin\tau\Big|_{\tau=-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{t} = \sqrt{2}\,(\arcsin t + \tfrac{\pi}{3})\,.$$

Folglich hat die Kurve γ die Länge $L(\gamma) = \psi(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}\,(\pi/4 + \pi/3) = \frac{7\sqrt{2}}{12}\,\pi$. Wegen

$$\psi(t) = s \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tfrac{s}{\sqrt{2}} - \tfrac{\pi}{3} = \arcsin t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \tfrac{\pi}{3})$$

ist $\psi^{-1}\colon [0, \frac{7\sqrt{2}}{12}\,\pi] \to [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $s \mapsto \psi^{-1}(s) = \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3})$. Damit lautet die Parametrisierung von γ bezüglich der Bogenlänge (oder auch natürliche Darstellung von γ)

$$\tilde\gamma(s) = \gamma(\psi^{-1}(s)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3} \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3}) \\ |\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3})| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3} \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3}) \\ \cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}, \qquad s \in \big[0, \tfrac{7\sqrt{2}}{12}\,\pi\big]\,.$$

Aufgabe 39

a) Die partielle Ableitung von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach x im Punkt $x^0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Richtungsableitung von f im Punkt x^0 in Richtung des ersten Einheitsvektors $e_1 = (1, 0)$, also

$$
\begin{aligned}
f_x(x^0) := \frac{\partial f}{\partial e_1}(x^0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0 + te_1) - f(x^0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((x,y) + t(1,0)) - f(x,y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x,y)}{t} \,.
\end{aligned}
$$

Für eine feste Zahl $y \in \mathbb{R}$ ist dies gerade der Grenzwert des Differenzenquotienten der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x,y)$. Um die partielle Ableitung von f nach x zu berechnen, können wir also $f(x,y)$ nach x differenzieren, wobei wir y als eine Konstante betrachten.
Entsprechendes erhalten wir für die partielle Ableitung nach y.

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$
f_x(x,y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = -4x^2y + 12xy^2 + 4y^3 \,.
$$

Daraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= 6x - 4y^2 \,, & f_{yy}(x,y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2 \,, \\
f_{xy}(x,y) &= -8xy + 12y^2 \,, & f_{yx}(x,y) &= -8xy + 12y^2 \,.
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Dass $f_{xy} = f_{yx}$ gilt, war wegen des Satzes von Schwarz schon vorher klar, denn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar, weil f_x und f_y stetig auf $\mathbb{R}^2$ sind.

b) Hier haben wir

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 2xe^{xy} + (x^2+y^2)ye^{xy} = (x^2y + 2x + y^3)e^{xy} \,, \\
f_y(x,y) &= 2ye^{xy} + (x^2+y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy} \,.
\end{aligned}
$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^2y + y^3 + 2x)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy} \,, \\
f_{yy}(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy} \,, \\
f_{yx}(x,y) &= (3x^2+y^2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)ye^{xy} = (x^3y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy} \\
&= f_{xy}(x,y) \,.
\end{aligned}
$$

Um die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}$ zu bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass f auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, weil die partiellen Ableitungen f_x und f_y von f auf $\mathbb{R}^2$ stetig sind. Deshalb gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= (Df)(x,y)\,v = \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = e^{xy} \begin{pmatrix} x^2y + 2x + y^3 & x^3 + xy^2 + 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= e^{xy}\,(x^2y + 2x + y^3 + x^3 + xy^2 + 2y) = e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2) \,.
\end{aligned}
$$

Wesentlich aufwendiger ist die Berechnung von $\frac{\partial f}{\partial v}$ mit Hilfe der Definition. Danach gilt für die Richtungsableitung von f im Punkt $x^0 = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $v = (v_1, v_2) = (1,1)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(x^0 + tv) - f(x^0)\Big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(x + tv_1, y + tv_2) - f(x,y)\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big((x+tv_1)^2 + (y+tv_2)^2\big)e^{(x+tv_1)(y+tv_2)} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + 2txv_1 + t^2v_1^2 + y^2 + 2tyv_2 + t^2v_2^2\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + y^2 + 2t(xv_1 + yv_2) + t^2(v_1^2 + v_2^2)\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big((x^2+y^2)e^{xy}\big(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1\big) + 2t(xv_1 + yv_2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} \\
&\qquad + t^2(v_1^2 + v_2^2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}\Big) \,.
\end{aligned}
$$

Zur Berechnung von $\frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}-1)$ setzen wir $\alpha := yv_1 + xv_2$ und $\beta := v_1v_2$ und betrachten die durch $g(t) := e^{\alpha t+\beta t^2}$ gegebene Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $g'(t) = (\alpha + 2\beta t)e^{\alpha t+\beta t^2}$. Nun gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}-1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g(t)-g(0)) = g'(0) = \alpha = yv_1 + xv_2\,.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= (x^2+y^2)e^{xy}(yv_1+xv_2) + 2(xv_1+yv_2)e^{xy}\cdot 1 + 0\\ &= e^{xy}\big((x^2+y^2)(y+x)+2(x+y)\big)\\ &= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2)\,.\end{aligned}$$

c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in (0,\infty)$ sind

$$f_x(x,y,z) = e^y/z\,, \qquad f_y(x,y,z) = xe^y/z\,, \qquad f_z(x,y,z) = -xe^y/z^2\,.$$

Weiter haben wir

$$f_{xx}(x,y,z) = 0\,, \qquad f_{yy}(x,y,z) = xe^y/z\,, \qquad f_{zz}(x,y,z) = 2xe^y/z^3\,.$$

Und schließlich noch die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}f_{xy}(x,y,z) &= e^y/z = f_{yx}(x,y,z)\,,\\ f_{xz}(x,y,z) &= -e^y/z^2 = f_{zx}(x,y,z)\,,\\ f_{yz}(x,y,z) &= -xe^y/z^2 = f_{zy}(x,y,z)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 40

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto \big(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\ x^2e^y + \sin x\big) =: \big(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)\big)$.
Da alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f

$$\begin{aligned}(f_1)_x(x,y,z) &= y^2z^3e^{xy^2z^3} + xy^2z^3e^{xy^2z^3}y^2z^3 = y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\ (f_1)_y(x,y,z) &= 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\ (f_1)_z(x,y,z) &= 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\ (f_2)_x(x,y,z) &= 2xe^y + \cos x,\\ (f_2)_y(x,y,z) &= x^2e^y,\\ (f_2)_z(x,y,z) &= 0\end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^3$ stetig sind, ist f auf $\mathbb{R}^3$ stetig partiell differenzierbar und damit auch auf $\mathbb{R}^3$ differenzierbar. Für die Ableitung von f ergibt sich

$$\begin{aligned}(Df)(x,y,z) &= \begin{pmatrix} (f_1)_x(x,y,z) & (f_1)_y(x,y,z) & (f_1)_z(x,y,z)\\ (f_2)_x(x,y,z) & (f_2)_y(x,y,z) & (f_2)_z(x,y,z)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3}\\ 2xe^y+\cos x & x^2e^y & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

b) Auch hier sind alle partiellen Ableitungen von f stetig, so dass f differenzierbar ist mit

$$(Df)(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x + \sinh y & e^x + x\cosh y\\ 6x\sin y & 4y^3 + 3x^2\cos y\\ -3x^2 & 4\end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

c) Wiederum ist f stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar. Für die Ableitung von f im Punkt $(r,\varphi,\theta)\in(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)$ ergibt sich

$$(Df)(r,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Durch Entwickeln nach der zweiten Spalte erhält man unter Verwendung von $\cos^2+\sin^2=1$

$$\begin{aligned}\det(Df)(r,\varphi,\theta)&=(-1)^3(-r\sin\varphi\cos\theta)\det\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\\ &\quad+r\cos\varphi\cos\theta\det\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\\ &=r\cos\theta\Big(\sin\varphi\left(r\sin\varphi\cos^2\theta+r\sin\varphi\sin^2\theta\right)\\ &\quad+\cos\varphi\left(r\cos\varphi\cos^2\theta+r\cos\varphi\sin^2\theta\right)\Big)\\ &=r\cos\theta\left(\sin\varphi\,(r\sin\varphi)+\cos\varphi\,(r\cos\varphi)\right)=r^2\cos\theta\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Funktion f bildet die Kugelkoordinaten (r,φ,θ) eines Punktes im $\mathbb{R}^3$ auf seine kartesischen Koordinaten (x,y,z) ab.

d) Wegen $x^y=e^{y\ln x}$ gilt $f_x(w,x,y,z)=e^{y\ln x}y/x=yx^{y-1}$, $f_y(w,x,y,z)=e^{y\ln x}\ln x=x^y\ln x$ und $f_w(w,x,y,z)=f_z(w,x,y,z)=0$. Also sind sämtliche partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ stetig, woraus die Differenzierbarkeit von f auf $\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ folgt. Für $(w,x,y,z)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}(Df)(w,x,y,z)&=\begin{pmatrix}f_w(w,x,y,z) & f_x(w,x,y,z) & f_y(w,x,y,z) & f_z(w,x,y,z)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0 & yx^{y-1} & x^y\ln x & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aufgabe 41

a) Auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Stetigkeit von f in $(0,0)$: Sei $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ mit $(x_k,y_k)\to(0,0)$ für $k\to\infty$. Dann gilt auch $m_k:=\max\{|x_k|,|y_k|\}\xrightarrow{k\to\infty}0$, und dies liefert dann

$$|f(x_k,y_k)|\leqslant\frac{|y_k^3|+|x_k^2y_k|}{x_k^2+y_k^2}\leqslant\frac{m_k^3+m_k^3}{m_k^2}=2m_k\xrightarrow{k\to\infty}0\,.$$

Das bedeutet $f(x_k,y_k)\to0=f(0,0)$, womit die Stetigkeit von f auf ganz $\mathbb{R}^2$ bewiesen ist.

b) Für jedes $(x,y)\neq(0,0)$ erhalten wir mit Hilfe der Quotientenregel

$$f_x(x,y)=\frac{-2xy(x^2+y^2)-(y^3-x^2y)2x}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$f_y(x,y)=\frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)-(y^3-x^2y)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4x^2y^2-x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Im Punkt $(0,0)$ dagegen müssen wir auf die Definition der partiellen Ableitung zurückgehen:

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0-0}{t}=0$$

und

$$f_y(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^3-0}{0+t^2}=\lim_{t\to0}1=1\,.$$

c) Wegen $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$ und

$$f_x(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}) = -\frac{4k^{-4}}{(k^{-2}+k^{-2})^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 0 = f_x(0,0)$$

sowie $(\frac{1}{k}, 0) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$ und

$$f_y(\tfrac{1}{k}, 0) = \frac{0 - k^{-4} + 0}{(k^{-2}+0)^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 1 = f_y(0,0)$$

sind die partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$ nicht stetig.

d) Es sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{(tv_2)^3 - (tv_1)^2 tv_2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_2^3 - t^3 v_1^2 v_2}{t^3(v_1^2+v_2^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2+v_2^2}\,.\end{aligned}$$

(Insbesondere existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.) Dies soll nun mit

$$\langle \operatorname{grad} f(0,0), v\rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \rangle = v_2$$

verglichen werden. Es gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \operatorname{grad} f(0,0), v\rangle$ genau dann, wenn

$$\frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2+v_2^2} = v_2 \iff v_2^3 - v_1^2 v_2 = v_2(v_1^2+v_2^2) \iff 2v_1^2 v_2 = 0\,.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

e) Nicht für alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \operatorname{grad} f(0,0), v\rangle$ erfüllt. Folglich kann die Funktion f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste diese Gleichung für alle Richtungen v gelten.

Da die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell differenzierbar, also auch differenzierbar. Für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$(Df)(x,y) = \big(\operatorname{grad} f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} -4xy^3 & -x^4+4x^2y^2+y^4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42

Wir bestimmen zunächst $(Df)(x_0,y_0)$. Da f in (x_0,y_0) differenzierbar ist, gilt

$$(Df)(x_0,y_0)u = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0) = -1 \qquad \text{und} \qquad (Df)(x_0,y_0)v = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = 2\,.$$

Setzen wir abkürzend $\alpha := f_x(x_0,y_0)$ und $\beta := f_y(x_0,y_0)$, so ist $(Df)(x_0,y_0) = (\alpha\ \beta)$, also $(Df)(x_0,y_0)u = (\alpha\ \beta)\binom{1}{2} = \alpha + 2\beta$ und $(Df)(x_0,y_0)v = (\alpha\ \beta)\binom{-1}{1} = -\alpha+\beta$. Obige Gleichungen liefern daher

$$\alpha + 2\beta = -1 \qquad \text{und} \qquad -\alpha+\beta = 2\,.$$

Hieraus erhält man durch Addieren $3\beta = 1$, also $\beta = \frac{1}{3}$, und damit $\alpha = -\frac{5}{3}$. Infolgedessen ist $(Df)(x_0,y_0) = (-\frac{5}{3}\ \ \frac{1}{3})$ und aufgrund der Differenzierbarkeit von f in (x_0,y_0) ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0,y_0) = (Df)(x_0,y_0)w = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\tfrac{4}{3}\,.$$

Wie wir aus der Vorlesung wissen, ist die gesuchte Richtung h gegeben durch

$$h = \frac{\operatorname{grad} f(x_0,y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\|_2} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2012
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 43

Offensichtlich besitzen alle drei Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ stetige partielle Ableitungen und sind damit auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar.
Für f mit den Komponentenfunktionen $f_1(x,y) := x^2$ und $f_2(x,y) := y^2$ gilt

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} (f_1)_x(x,y) & (f_1)_y(x,y) \\ (f_2)_x(x,y) & (f_2)_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

und ebenso ergibt sich

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad Dh(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2 & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel kommen wir dann auf

$$\begin{aligned} D(g\circ f)(x,y) = Dg\big(f(x,y)\big)\cdot Df(x,y) &= \begin{pmatrix} y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Ableitung der Funktion $h\circ g$ erhält man

$$\begin{aligned} D(h\circ g)(x,y) = Dh\big(g(x,y)\big)\cdot Dg(x,y) &= \begin{pmatrix} e^{x+y} & \sin(xy) \\ 2 & 0 \\ 0 & e^{e^{x+y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{x+y}\big(y\cos(xy)+\sin(xy)\big) & e^{x+y}\big(x\cos(xy)+\sin(xy)\big) \\ 2y\cos(xy) & 2x\cos(xy) \\ e^{x+y}e^{e^{x+y}} & e^{x+y}e^{e^{x+y}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen

$$(g\circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x^2,y^2) = \big(\sin(x^2y^2),\, e^{x^2+y^2}\big) =: \big(u_1(x,y), u_2(x,y)\big)$$

erhalten wir

$$D(g\circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} (u_1)_x(x,y) & (u_1)_y(x,y) \\ (u_2)_x(x,y) & (u_2)_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$(h\circ g)(x,y) = h\big(\sin(xy),\, e^{x+y}\big) = \big(\sin(xy)e^{x+y}, 2\sin(xy), e^{e^{x+y}}\big) =: \big(v_1(x,y), v_2(x,y), v_3(x,y)\big)$$

und für die Ableitung von $h\circ g$ ergibt sich

$$D(h\circ g)(x,y) = \begin{pmatrix} (v_1)_x(x,y) & (v_1)_y(x,y) \\ (v_2)_x(x,y) & (v_2)_y(x,y) \\ (v_3)_x(x,y) & (v_3)_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y}\big(y\cos(xy)+\sin(xy)\big) & e^{x+y}\big(x\cos(xy)+\sin(xy)\big) \\ 2y\cos(xy) & 2x\cos(xy) \\ e^{x+y}e^{e^{x+y}} & e^{x+y}e^{e^{x+y}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 44

a) Der Umkehrsatz liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Funktion g ist stetig differenzierbar, es gilt $g(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{4})$ und die Matrix $Dg(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ ist regulär. Wir überprüfen diese Voraussetzungen: Die Funktion g ist stetig differenzierbar, weil alle partiellen Ableitungen von g stetig sind (vgl. $(*)$). Weiter ist

$$g(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\ln 2)\,\cos\frac{\pi}{2} \\ \sinh(\ln 2)\,\sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Schließlich gilt

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh x\,\cos y & -\cosh x\,\sin y \\ \cosh x\,\sin y & \sinh x\,\cos y \end{pmatrix}, \tag{$*$}$$

und damit ist

$$Dg(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\ln 2) \\ \cosh(\ln 2) & 0 \end{pmatrix}$$

regulär, denn $\det Dg(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = \cosh^2(\ln 2) \neq 0$ wegen $\cosh(\ln 2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$.

Nach dem Umkehrsatz gilt

$$D(g^{-1})(0, \tfrac{3}{4}) = \big(Dg(g^{-1}(0, \tfrac{3}{4}))\big)^{-1} = \big(Dg(\ln 2, \tfrac{\pi}{2})\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar (siehe **a)**) und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\det Dg(x,y) = (\sinh x\,\cos y)^2 + (\cosh x\,\sin y)^2 .$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn $\sinh x\,\cos y = 0$ und $\cosh x\,\sin y = 0$ gilt. Für $x > 0$ ist dies wegen $\sinh x \neq 0$ und $\cosh x \neq 0$ gleichbedeutend mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, kann also nie eintreten. Folglich ist für $x > 0$ die Matrix $Dg(x,y)$ stets regulär. Der Umkehrsatz liefert nun die lokale Invertierbarkeit von g in jedem Punkt $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Trotzdem ist die Funktion g auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ nicht injektiv wegen $g(x, y + 2\pi) = g(x,y)$ für $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 45

a) Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$. Dann ist f auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar mit

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3yz + 3x^2 & -3xz - 3y^2 & 3z^2 + 4z - 3xy \end{pmatrix},$$

also $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 4z - 3xy$. Die Auflösbarkeit der Gleichung $f(x,y,z) = 0$ nach z in einer Umgebung von $(0,0,-2)$ folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn

$$f(0,0,-2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-2) \neq 0$$

erfüllt sind. Es gilt $f(0,0,-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung von g gilt

$$\begin{aligned} Dg(x,y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,g(x,y)\big)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\big(x,y,g(x,y)\big) \\ &= -\frac{1}{3g(x,y)^2 + 4g(x,y) - 3xy} \begin{pmatrix} -3yg(x,y) + 3x^2 & -3xg(x,y) - 3y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von $(0,0,1,1)$ durch die Gleichung

$$f(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \quad f(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} x^2+y^2-u^2+v^2 \\ x^2+2y^2-3u^2+4v^2-1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen u und v definiert werden. Offenbar ist $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass $f(0,0,1,1) = \vec{0}$ gilt; die ersten beiden Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)$ regulär ist. Wegen

$$Df(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad \frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

und damit $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,1,1) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrix ist tatsächlich regulär, denn $\det\left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right) = -4 \neq 0$.

Somit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen erfüllt. Danach gibt es offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$, $V \subset \mathbb{R}^2$ von $(1,1)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to V$ mit $g(0,0) = (1,1)$ und $f(x,y,g(x,y)) = \vec{0}$ für alle $(x,y) \in U$. Definiert man u als die erste Komponentenfunktion von g und v als die zweite Komponentenfunktion von g, dann leisten $u, v\colon U \to \mathbb{R}$ das Gewünschte. Außerdem ergibt für sich für $(x,y) \in U$

$$\begin{aligned} Dg(x,y) &= -\left(\tfrac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,g(x,y))\right)^{-1} \tfrac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y)) \\ &= -\left(\tfrac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,u(x,y),v(x,y))\right)^{-1} \tfrac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,u(x,y),v(x,y)) \\ &= -\begin{pmatrix} -2u(x,y) & 2v(x,y) \\ -6u(x,y) & 8v(x,y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere für $(x,y) = (0,0)$ ist der zweite Faktor die Nullmatrix, so dass dann

$$Dg(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Dies bedeutet, dass $u_x(0,0) = u_y(0,0) = v_x(0,0) = v_y(0,0)$ gilt.

Dieses Ergebnis kann man auch folgendermaßen herleiten: Bilden wir in den beiden Gleichungen $x^2+y^2-u^2+v^2 = 0$ und $x^2+2y^2-3u^2+4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach x, wobei wir $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ jetzt als die implizit definierten Funktionen auffassen, so ergibt sich

$$2x - 2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x - 6uu_x + 8vv_x = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_x(0,0) + 2v_x(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_x(0,0) + 8v_x(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_x(0,0) = v_x(0,0) = 0$.

Um die partiellen Ableitungen nach y der implizit definierten Funktionen $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ zu berechnen, gehen wir analog wie eben vor. Wir bilden in beiden Gleichungen $x^2+y^2-u^2+v^2 = 0$ und $x^2+2y^2-3u^2+4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach y und erhalten

$$2y - 2uu_y + 2vv_y = 0 \qquad \text{und} \qquad 4y - 6uu_y + 8vv_y = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_y(0,0) + 2v_y(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_y(0,0) + 8v_y(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_y(0,0) = v_y(0,0) = 0$.

Aufgabe 46

a) Das Taylorpolynom zweiten Grades von f in $x^0 = (1, -1, 0)$ ist gegeben durch

$$T_{2,x^0}(h) = f(x^0) + \nabla f(x^0) \cdot h + \tfrac{1}{2} h^T H_f(x^0) h\,.$$

Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = xe^z - y^2$, ergibt sich

$$f_x(x,y,z) = e^z\,, \qquad f_y(x,y,z) = -2y\,, \qquad f_z(x,y,z) = xe^z\,.$$

Damit erhalten wir $f_x(1,-1,0) = 1$, $f_y(1,-1,0) = 2$ und $f_z(1,-1,0) = 1$. Weiter gilt

$$f_{xx} = 0\,, \quad f_{xy} = 0\,, \quad f_{xz} = e^z\,, \quad f_{yy} = -2\,, \quad f_{yz} = 0\,, \quad f_{zz} = xe^z\,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$f(x^0) = 0\,, \qquad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \qquad H_f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Folglich ist

$$T_{2,x^0}(h_1,h_2,h_3) = 0 + h_1 + 2h_2 + h_3 + \tfrac{1}{2}\big(-2h_2^2 + h_3^2 + 2h_1h_3\big) = h_1 + 2h_2 + h_3 - h_2^2 + \tfrac{1}{2}h_3^2 + h_1h_3\,.$$

Schreibt man $h = (x,y,z) - x^0 = (x-1, y+1, z)$, so erhält man

$$(x-1) + 2(y+1) + z - (y+1)^2 + \tfrac{1}{2}z^2 + (x-1)z\,.$$

b) Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, gilt

$$\begin{array}{lllll}
f(x,y) & = e^{x-y}\cos x \sin y & \Rightarrow & f(0,0) & = 0 \\
f_x(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \sin y - \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_x(0,0) & = 0 \\
f_y(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \cos y - \cos x \sin y) & \Rightarrow & f_y(0,0) & = 1 \\
f_{xx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xx}(0,0) & = 0 \\
f_{xy}(x,y) & = e^{x-y}(\sin x \sin y - \sin x \cos y - \cos x \sin y + \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xy}(0,0) & = 1 \\
f_{yy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yy}(0,0) & = -2 \\
f_{xxx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x \sin y - 2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxx}(0,0) & = 0 \\
f_{xxy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x \cos y + 2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxy}(0,0) & = 0 \\
f_{xyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\sin x \cos y - 2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xyy}(0,0) & = -2 \\
f_{yyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\cos x \sin y + 2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yyy}(0,0) & = 2
\end{array}$$

Damit ist für $h = (h_1, h_2)$

$$\begin{aligned}
T_{3,(0,0)}(h) &= f(0,0) + \tfrac{1}{1!}\,(h \cdot \nabla) f(0,0) + \tfrac{1}{2!}\,(h \cdot \nabla)^2 f(0,0) + \tfrac{1}{3!}\,(h \cdot \nabla)^3 f(0,0) \\
&= f(0,0) + \sum_{j=1}^{2} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0,0) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2} h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}(0,0) + \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^{2} h_j h_k h_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_l}(0,0) \\
&= 0 + h_2 + \tfrac{1}{2}\big(h_1h_2 + h_2h_1 + h_2^2(-2)\big) + \tfrac{1}{6}\big(h_1h_2h_2(-2) + h_2h_1h_2(-2) + h_2h_2h_1(-2) + h_2^3 2\big) \\
&= h_2 + h_1h_2 - h_2^2 - h_1h_2^2 + \tfrac{1}{3}\,h_2^3\,.
\end{aligned}$$

Schreiben wir $(x,y) = h + x^0 = h$, so erhalten wir

$$T_{3,(0,0)}(x,y) = y + xy - y^2 - xy^2 + \tfrac{1}{3}\,y^3\,.$$

Aufgabe 47

a) **i)** Offenbar gilt $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Man erhält also alle Kandidaten für lokale Extremstellen durch Nullsetzen des Gradienten und kann sie dann mit Hilfe der Hessematrix genauer untersuchen.

Der Gradient von f lautet $\operatorname{grad} f(x, y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2)$. Die erste Komponente ist Null genau dann, wenn $y = 2x^2$ ist. In diesem Fall ergibt sich für die zweite Komponente $-3x + 24x^4 = 3x(8x^3 - 1)$. Die stationären Punkte sind also $(0, 0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$.

Da $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte -3 und 3 besitzt, ist $H_f(0, 0)$ indefinit. (Alternative Begründung: $\det H_f(0, 0) = -9 < 0$.) Deshalb hat f in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt.

Da $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 3 und 9 besitzt, ist $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ positiv definit. (Alternativ: $6 > 0$ und $\det H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 27 > 0$.) Somit hat f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

ii) Zweimalige Anwendung der Kettenregel zeigt: $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Der Gradient von f lautet

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6x + y^2 \\ 2xy - 2y \end{pmatrix}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die zweite Komponente von $\operatorname{grad} f(x, y)$ verschwindet genau dann, wenn $y(x - 1) = 0$ gilt, also wenn $y = 0$ oder $x = 1$ ist.

Im Fall $y = 0$ ergibt sich für die erste Komponente $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Genau für $x = 0$ oder $x = 2$ ist diese Null.

Im Fall $x = 1$ ergibt sich für die erste Komponente $3 - 6 + y^2 = -3 + y^2$. Genau für $y = \sqrt{3}$ oder $y = -\sqrt{3}$ ist diese Null.

Damit sind $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$ alle kritischen Punkte von f.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 6 & 2y \\ 2y & 2x - 2 \end{pmatrix}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $-6, -2$ und ist somit negativ definit. Daher besitzt f in $(0, 0)$ ein lokales Maximum mit $f(0, 0) = 0$.

$H_f(2, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $6, 2$ und ist somit positiv definit. Daher besitzt f in $(2, 0)$ ein lokales Minimum mit $f(2, 0) = -4$.

$H_f(1, \sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, weil $\det H_f(1, \sqrt{3}) = -12 < 0$ gilt. Daher liegt in $(1, \sqrt{3})$ ein Sattelpunkt von f vor.

$H_f(1, -\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, weil $\det H_f(1, -\sqrt{3}) = -12 < 0$ gilt. Daher liegt in $(1, -\sqrt{3})$ ein Sattelpunkt von f vor.

b) Da Q abgeschlossen und beschränkt ist und f auf Q stetig ist, nimmt f auf Q Maximum und Minimum an.

Wir betrachten f zunächst im Inneren von Q, also auf $(0, 5) \times (0, 5)$. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy - 4y - 4x \\ x^2 - 4x + 4 \end{pmatrix}.$$

Gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, so liefert die zweite Komponente $(x-2)^2 = 0$, d.h. $x = 2$. Für $x = 2$ lautet die erste Komponente -8. Diese ist stets $\neq 0$, so dass es keine kritischen Punkte von f gibt. Daher besitzt f keine lokalen Extremstellen in $(0,5) \times (0,5)$ und die Extrema von f werden auf dem Rand von Q angenommen. Wir untersuchen f auf dem Rand von Q:

$x = 0$: $f(0,y) = 4y - 2$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(0,5) = 18$ und minimal für $y = 0$ mit $f(0,0) = -2$.

$x = 5$: $f(5,y) = 9y - 52$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(5,5) = -7$ und minimal für $y = 0$ mit $f(5,0) = -52$.

$y = 0$: $f(x,0) = -2x^2 - 2 =: g_1(x)$. Wegen $g_1'(x) = -4x \leqslant 0$ für $x \in [0,5]$ ist g_1 auf $[0,5]$ monoton fallend. Daher sind 0 und 5 die Extremstellen von $g_1 = f(\cdot,0)$ mit $f(0,0) = -2$ und $f(5,0) = -52$.

$y = 5$: $f(x,5) = 3x^2 - 20x + 18 =: g_2(x)$. Wegen $g_2'(x) = 6x - 20 = 0 \iff x = \frac{10}{3} \in (0,5)$ müssen wir $f(0,5) = 18$, $f(\frac{10}{3},5) = -\frac{46}{3}$ und $f(5,5) = -7$ berücksichtigen.

Insgesamt erhalten wir durch Vergleich der Funktionswerte

$$\max_{(x,y)\in Q} f(x,y) = 18 \quad \text{und} \quad \min_{(x,y)\in Q} f(x,y) = -52.$$

Aufgabe 48

Äquivalent zur Mini- bzw. Maximierung des Abstandes ist die Mini- bzw. Maximierung des Abstandquadrates

$$f(x,y) := \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 .$$

Die Nebenbedingung ist durch die Kreislinie

$$h(x,y) := x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$$

gegeben. Um die Multiplikatorenregel von Lagrange anwenden zu können, muss für die in Frage kommenden Punkte

$$\operatorname{rg} Dh(x,y) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2(y+1) \end{pmatrix} \overset{!}{=} 1$$

überprüft werden. Diese Bedingung ist nur im Punkt $(1,-1)$ (Kreismittelpunkt) nicht erfüllt, der wegen $h(1,-1) = -1$ nicht auf der Kreislinie liegt und somit nicht Extremalkandidat ist.
Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda h(x,y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 + \lambda\big((x-1)^2 + (y+1)^2 - 1\big)$$

und die notwendige Bedingung für Extrema lautet

$$\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(x+1) + 2\lambda(x-1) \\ 2(y-1) + 2\lambda(y+1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq -1$. Daher erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen

$$x(2+2\lambda) = 2\lambda - 2 \iff x = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \quad \text{und} \quad y(2+2\lambda) = 2 - 2\lambda \iff y = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}.$$

Also ist $y = -x$. Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $2x^2 - 4x + 1 = 0$, also

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und damit} \quad y_{1,2} = -x_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich sind $P_1 := (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $P_2 := (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ Kandidaten für Extrema. Da Maximum und Minimum der stetigen Funktion f auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$ angenommen werden und außerdem $\sqrt{f(P_1)} = 1 + 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{f(P_2)} = -1 + 2\sqrt{2}$ gilt, wird im Punkt P_1 der maximale Abstand $1 + 2\sqrt{2}$ und im Punkt P_2 der minimale Abstand $2\sqrt{2} - 1$ angenommen.

Aufgabe 49

Da die Menge S beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert. Definiere

$$h(x,y,z) := \begin{pmatrix} h_1(x,y,z) \\ h_2(x,y,z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x,y,z) = (0,0)\}$. Zur Bestimmung der globalen Extrema von f auf S verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen: Sowohl f als auch h sind auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Wegen

$$Dh(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

gilt $\operatorname{rg} Dh(x,y,z) < 2$ genau für $x = y = z$; solche Punkte können jedoch die Nebenbedingungen $h_1(x,y,z) = 0$ und $h_2(x,y,z) = 0$ nicht erfüllen, denn aus $x+y+z = 0$ folgte dann $x = y = z = 0$ im Widerspruch zu $x^2+y^2+z^2 = 1$. Also erhalten wir sämtliche Kandidaten für Extremstellen durch Anwenden der Multiplikatorenregel von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &:= f(x,y,z) + \lambda_1 h_1(x,y,z) + \lambda_2 h_2(x,y,z) \\ &= 5x + y - 3z + \lambda_1(x+y+z) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1) \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\operatorname{grad} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \vec{0}$, also die fünf Gleichungen

$$5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0\,, \qquad 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0\,, \qquad -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0\,,$$
$$x+y+z = 0\,, \qquad x^2+y^2+z^2-1 = 0\,.$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x+y+z) = 0\,,$$

wegen $x+y+z = 0$ also $\lambda_1 = -1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4 + 2\lambda_2 x = 0$, was insbesondere $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y = 0$, woraus mit $\lambda_2 \neq 0$ sofort $y = 0$ folgt. Aus $x+y+z = 0$ ergibt sich dann $z = -x$ und in $x^2+y^2+z^2 = 1$ eingesetzt folgt $2x^2 = 1$, d.h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right).$$

Die Funktionswerte dort sind $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = 4\sqrt{2}$ bzw. $f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = -4\sqrt{2}$. Folglich besitzt f auf der Menge S das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Sommersemester 2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 50

a) Mit $\dot\gamma(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$ ergibt sich für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}\|\dot\gamma(t)\|_2 &= \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\\ &= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\,\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\,\cos t + t^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{2+t^2}\,.\end{aligned}$$

Nach Definition des Kurvenintegrals für Skalarfelder ist dann

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|_2\,dt = \int_0^{2\pi}\Big(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\Big)\sqrt{2+t^2}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \big[\tfrac13(2+t^2)^{3/2}\big]_0^{2\pi} = \tfrac13\big((2+4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}\big)\\ &= \tfrac23\sqrt2\big((1+2\pi^2)^{3/2} - 1\big)\,.\end{aligned}$$

b) i) Hier benutzen wir die Definition des Kurvenintegrals für Vektorfelder

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s &= \int_0^{2\pi} \vec v(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} e^{\cos t}\\ \cos t\,\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}dt\\ &= \int_0^{2\pi}(-e^{\cos t}\sin t + \sin t\,\cos^2 t)\,dt = \big[e^{\cos t} - \tfrac13\cos^3 t\big]_0^{2\pi} = 0\,.\end{aligned}$$

ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s &= \int_0^{\ln 2}\vec v(\gamma(t))\cdot\gamma(t)\,dt = \int_0^{\ln 2}\begin{pmatrix}\cosh t\\ -\sinh t\\ \sinh t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\\ \cosh t\end{pmatrix}dt\\ &= \int_0^{\ln 2}(\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t\,\cosh t)\,dt = \int_0^{\ln 2}(1 + \sinh t\,\cosh t)\,dt\\ &= \ln 2 + \big[\tfrac12\sinh^2 t\big]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \tfrac12\sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \tfrac12\big(\tfrac12(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\big)^2 = \ln 2 + \tfrac{9}{32}\,.\end{aligned}$$

iii) Die Kurven $\gamma_1\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t,0)$, und $\gamma_2\colon [1,2]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (1, t-1)$, sind regulär und es gilt $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s &= \int_{\gamma_1}\vec v\cdot d\vec s + \int_{\gamma_2}\vec v\cdot d\vec s = \int_0^1 \vec v(\gamma_1(t))\cdot\dot\gamma_1(t)\,dt + \int_1^2\vec v(\gamma_2(t))\cdot\dot\gamma_2(t)\,dt\\ &= \int_0^1\begin{pmatrix}\sin t\\ t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}dt + \int_1^2\begin{pmatrix}\sin 1\\ 1+(t-1)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}dt\\ &= \int_0^1\sin t\,dt + \int_1^2\big(1+(t-1)^2\big)\,dt\\ &= \big[-\cos t\big]_0^1 + \big[t + \tfrac13(t-1)^3\big]_1^2 = (-\cos 1 + 1) + (2 + \tfrac13 - 1) = \tfrac73 - \cos 1\,.\end{aligned}$$

c) Schreibe $\vec{f} =: (f_1, f_2)$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist und die Verträglichkeitsbedingung

$$\partial_1 f_2(x,y) = \partial_x(x^2+y^2) = 2x = \partial_y(2xy) = \partial_2 f_1(x,y) \qquad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

erfüllt ist, stellt $\vec{f}$ ein Potentialfeld dar, d.h. es gibt ein Skalarfeld $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ mit $\vec{f} = \nabla\varphi$. Wegen $\partial_x\varphi(x,y) = f_1(x,y) = 2xy$ ist $\varphi(x,y) = x^2y + \psi(y)$ für eine stetig differenzierbare Funktion $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aus $\partial_y\varphi(x,y) = f_2(x,y)$ und $\partial_y\varphi(x,y) = x^2 + \psi'(y)$ folgt $\psi'(y) = y^2$. Dies ist beispielsweise für $\psi(y) = \frac{1}{3}\,y^3$ erfüllt. Somit ist

$$\varphi(x,y) = x^2y + \frac{1}{3}\,y^3$$

ein Potential von $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^2$. Die verrichtete Arbeit A ist gleich dem Wert des Kurvenintegrals

$$A = \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_\gamma (\nabla\varphi)\cdot d\vec{s}\,,$$

welches nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve γ abhängt:

$$A = \varphi(-1,2) - \varphi(0,0) = \frac{14}{3}\,.$$

Aufgabe 51

a) Die Funktionen $\vec{v}$, $\vec{w}$ sind stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind. Im $\mathbb{R}^3$ ist dies äquivalent dazu, dass die Rotation verschwindet. Schreibe $\vec{v} =: (v_1, v_2, v_3)$. Wegen

$$\partial_2 v_3(x,y,z) = 2y + 3z^2x^2 \neq 3z^2x^2 = \partial_3 v_2(x,y,z)$$

ist $\operatorname{rot}\vec{v} \neq \vec{0}$. Also ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld, d.h. es gibt kein C^1-Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$.

Für $\vec{w} =: (w_1, w_2, w_3)$ hingegen gilt

$$\begin{aligned} \partial_2 w_3(x,y,z) &= e^z = \partial_3 w_2(x,y,z)\,,\\ \partial_3 w_1(x,y,z) &= 2z = \partial_1 w_3(x,y,z)\,,\\ \partial_1 w_2(x,y,z) &= 0 = \partial_2 w_1(x,y,z)\,. \end{aligned}$$

Somit ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld, besitzt also ein Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für dieses Potential muss $\partial_x f(x,y,z) = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert

$$f(x,y,z) = z^2x + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion $c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Die „Integrationskonstante" kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $\partial_y f(x,y,z) = \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y,z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z + d(z)\,,$$

und hieraus folgt $\partial_z f(x,y,z) = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von $\vec{w}$ wird, muss $d'(z) = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben ein Potential von $\vec{w}$:

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z\,.$$

b) Bei $\vec{v}$ müssen wir das Kurvenintegral nach Definition ausrechnen:

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 -t^2 + 2t\,dt = \big[-\tfrac{1}{3}t^3 + t^2\big]_0^1 = \tfrac{2}{3}\,.$$

Bei $\vec{w}$ dagegen können wir auf das oben berechnete Potential f zurückgreifen:

$$\int_\gamma \vec{w}\cdot d\vec{s} = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = f(0,1,0) - f(1,0,0) = 1 - 0 = 1\,.$$

Aufgabe 52

a) Offenbar ist der Integrand jeweils eine stetige Funktion.

i) Es gilt

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy+y^2)\,d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 (xy+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}\right) dx = \left[\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{3}x\right]_0^1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}\,.$$

ii) Diesmal ergibt sich

$$\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\,d(x,y) = \int_{-1}^0 \int_0^2 \cosh(2x+y)\,dy\,dx = \int_{-1}^0 \big[\sinh(2x+y)\big]_{y=0}^2 dx$$

$$= \int_{-1}^0 \big(\sinh(2x+2) - \sinh(2x)\big)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\cosh(2x+2) - \tfrac{1}{2}\cosh(2x)\right]_{-1}^0$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\cosh 2 - \tfrac{1}{2}\cosh 0\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cosh 0 - \tfrac{1}{2}\cosh(-2)\right) = \cosh 2 - 1\,.$$

Rechnet man den hyperbolischen Cosinus noch aus, so erhält man $\frac{1}{2}(e^2+e^{-2})-1$.

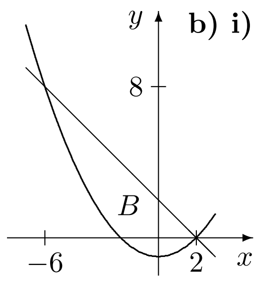
b) **i)** Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und $y = 2-x$. Dazu müssen wir die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 2 - x$, also $x^2 + 4x - 12 = 0$ bestimmen. Dies sind $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$ (siehe auch Skizze). Für den Flächeninhalt von B ergibt sich

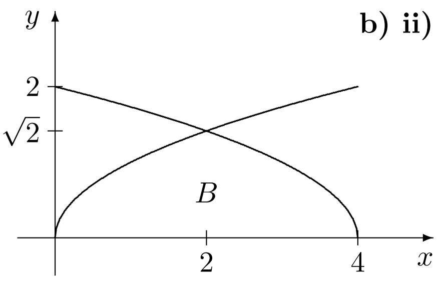
$$\iint\limits_B d(x,y) = \int_{-6}^2 \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} dy\,dx = \int_{-6}^2 \big((2-x) - (\tfrac{1}{4}x^2-1)\big)\,dx = \int_{-6}^2 (-\tfrac{1}{4}x^2 - x + 3)\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-6}^2 = -\tfrac{2}{3} - 2 + 6 - (18 - 18 - 18) = \tfrac{64}{3}\,.$$

ii) Hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4 - y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4 - y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y > 0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt{2}$ (siehe Skizze). Es gilt

$$\iint\limits_B d(x,y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{4-y^2} dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \big((4-y^2)-y^2\big)\,dy = \left[4y - \tfrac{2}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}\,.$$





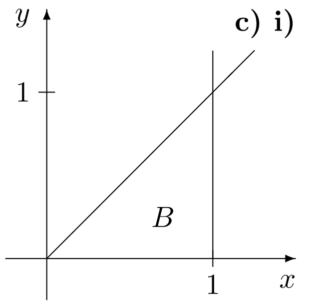
c) **i)** Es gilt

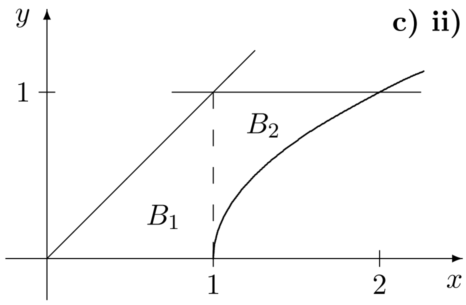
$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x dy\, e^{x^2}\,dx = \int_0^1 x e^{x^2}\,dx = \left[\tfrac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \tfrac{e-1}{2}\,.$$

Bemerkung: Hier ist das innere Integral $\int_y^1 e^{x^2}\,dx$ nicht explizit berechenbar. Für die Bestimmung eines iterierten Integrals kann also die Integrationsreihenfolge wesentlich sein.

ii) Wir spalten den Integrationsbereich B in zwei Teile B_1, B_2 auf (siehe Skizze) und erhalten

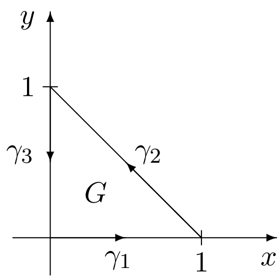
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \, dx \, dy &= \iint\limits_{B_1} x^2 y \, d(x,y) + \iint\limits_{B_2} x^2 y \, d(x,y) \\ &= \int_0^1 \int_0^x x^2 y \, dy \, dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=0}^x dx + \int_1^2 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=\sqrt{x-1}}^1 dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2} x^4 \, dx + \int_1^2 \left(\tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} x^2 (x-1)\right) dx \\ &= \left[\tfrac{1}{10} x^5\right]_{x=0}^1 + \left[-\tfrac{1}{8} x^4 + \tfrac{1}{3} x^3\right]_{x=1}^2 = \tfrac{1}{10} + \left(-2 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{67}{120}\,.\end{aligned}$$





Aufgabe 53

Zunächst berechnen wir $\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:



Definiere die regulären Kurven

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_1(t) = (t,0)\,, \\ &\gamma_2 \colon [1,2] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_2(t) = (2-t, t-1)\,, \\ &\gamma_3 \colon [2,3] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_3(t) = (0, 3-t)\,. \end{aligned}$$

Dann haben $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die in der Skizze gekennzeichneten Träger und es gilt $\gamma_1(1) = (1,0) = \gamma_2(1)$ sowie $\gamma_2(2) = (0,1) = \gamma_3(2)$. Da der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ durch $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ gegeben ist, erhält man

$$\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s}\,.$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) \, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t \cdot 0 \\ t^2 \cdot 0 - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}\,,$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_1^2 \begin{pmatrix} (2-t)^2+(2-t)(t-1) \\ (2-t)^2(t-1)-(t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_1^2 \begin{pmatrix} 2-t \\ t^3-6t^2+10t-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_1^2 \big(t^3-6t^2+11t-7\big)\, dt = \Big[\frac{1}{4}\,t^4 - 2t^3 + \frac{11}{2}\,t^2 - 7t\Big]_1^2 = -\frac{3}{4}$$

und

$$\int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_2^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -(3-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_2^3 (3-t)^2\, dt = \Big[-\frac{1}{3}\,(3-t)^3\Big]_2^3 = \frac{1}{3}\,.$$

Zusammen folgt

$$\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:
$G \subset \mathbb{R}^2$ sei das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Dann ist G offen und konvex und somit ein Gebiet. Außerdem besteht der Rand von G aus den regulären Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$: $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ ist geschlossen und doppelpunktfrei und hat ∂G als Spur. Ferner "liegt G links von γ". Es seien $v_1(x,y) := x^2 + xy$ sowie $v_2(x,y) := x^2y - y^2$ gesetzt. Offenbar ist $\vec{v} = (v_1, v_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so dass die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene erfüllt sind. Dieser liefert

$$\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint_G \big(\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y)\big)\, d(x,y) = \iint_G (2xy - x)\, d(x,y)\,.$$

Da der Integrand stetig ist, erhält man

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy - x)\, dy\, dx = \int_0^1 \big[xy^2 - xy\big]_{y=0}^{1-x}\, dx$$
$$= \int_0^1 \big(x(1-x)^2 - x(1-x)\big)\, dx = \int_0^1 \big(x^3 - x^2\big)\, dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.$$

Aufgabe 54

Setzen wir $\vec{v}(x,y) := (v_1(x,y), v_2(x,y))$ mit $v_1(x,y) := -x^2y$ und $v_2(x,y) := xy$, dann ist $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und es gilt $\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y) = y + x^2$. Der Gaußsche Integralsatz liefert

$$\iint_G (x^2+y)\, d(x,y) = \iint_G \big(\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y)\big)\, d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{v}\cdot d\vec{s}\,.$$

Der positiv orientierte Rand ∂G der offenen Einheitskreisscheibe G ist gegeben durch die reguläre Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Folglich ergibt sich

$$\iint_G (x^2+y)\, d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t\, \sin t \\ \cos t\, \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \big(\cos^2 t\, \sin^2 t + \sin t\, \cos^2 t\big)\, dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4}\sin^2(2t)\, dt + \int_0^{2\pi} \sin t\, \cos^2 t\, dt$$
$$= \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\, dt - \big[\tfrac{1}{3}\cos^3 t\big]_{t=0}^{2\pi} \overset{(**)}{=} \tfrac{1}{8}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\, du \overset{(***)}{=} \tfrac{1}{8}\cdot 2\pi = \tfrac{\pi}{4}\,.$$

Hierbei verwendeten wir in $(*)$ das Additionstheorem des Sinus $2\,\sin t\,\cos t = \sin(2t)$, in $(**)$ die Substitution $u = 2t$ und in $(***)$ die Identität $\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du = \pi$. Letztere kann man z.B. mit Hilfe von partieller Integration zeigen.

Aufgabe 55

a) Für $(x,y,z) \in A$ gilt nach Definition der Menge $x \in [1,2]$ sowie $0 \leqslant x^2 - y^2$, also $y^2 \leqslant x^2$, d.h. $|y| \leqslant |x| = x$ wegen $x > 0$. Mit

$$A_0 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [1,2],\, -x \leqslant y \leqslant x\big\}$$

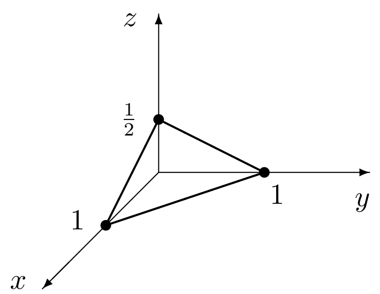
lässt sich A folgendermaßen schreiben

$$A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in A_0,\, 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\big\}\,.$$

Da der Integrand $f(x,y,z) = 1$ stetig ist, erhält man für das Volumen von A

$$\begin{aligned}\iiint\limits_A d(x,y,z) &= \iint\limits_{A_0} \left(\int_0^{x^2-y^2} dz\right) d(x,y) = \int_1^2 \int_{-x}^{x} \int_0^{x^2-y^2} dz\, dy\, dx \\ &= \int_1^2 \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\, dy\, dx = \int_1^2 \big[x^2 y - \tfrac{1}{3} y^3\big]_{y=-x}^{x}\, dx = \int_1^2 \tfrac{4}{3}\, x^3\, dx \\ &= \big[\tfrac{1}{3}\, x^4\big]_{x=1}^{2} = \tfrac{1}{3}(16-1) = 5\,.\end{aligned}$$

b)



Die Menge B wird von den Koordinatenebenen und von der Ebene durch die drei Punkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,\frac{1}{2})$ begrenzt (siehe Skizze). Damit ist $(x,y,z) \in B$ äquivalent zu

$$0 \leqslant x \leqslant 1\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\,, \quad 0 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}(1 - x - y)\,.$$

Bei B handelt es sich also um

$$\begin{aligned}&B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in B_0\,,\ 0 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}(1-x-y)\big\}\,,\\ &\text{wobei} \quad B_0 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant x \leqslant 1\,,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\big\}\,.\end{aligned}$$

Da $(x,y,z) \mapsto \sin z$ auf $\mathbb{R}^3$ stetig ist, ergibt sich für das Integral

$$\begin{aligned}\iiint\limits_B \sin z\, d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{(1-x-y)/2} \sin z\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \big[-\cos z\big]_{z=0}^{(1-x-y)/2}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big(-\cos\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + 1\Big)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \big[2\sin\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + y\big]_{y=0}^{1-x}\, dx = \int_0^1 \Big(1 - x - 2\sin\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\Big)\, dx \\ &= \big[x - \tfrac{1}{2}x^2 - 4\cos\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\big]_{x=0}^{1} = \big(1 - \tfrac{1}{2} - 4\cos 0\big) + 4\cos\big(\tfrac{1}{2}\big) = -\tfrac{7}{2} + 4\cos\big(\tfrac{1}{2}\big)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 56

a) Zur Berechnung von

$$\iint_B \frac{y}{x}\, d(x,y)\,, \qquad \text{wobei} \quad B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|(x,y)\|_2 \in [1,8],\ |y| \leqslant x\big\}\,,$$

führen wir Polarkoordinaten ein:

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad d(x,y) = r\,d(r,\varphi)$$

mit $r \in [1,8]$, $\varphi \overset{(*)}{\in} [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. (Hierbei ergibt sich $(*)$ durch die Bedingung $|y| \leqslant x$. Würde man $\varphi \in [0, 2\pi]$ fordern, so müsste man $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{7}{4}\pi, 2\pi]$ wählen und B in $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|(x,y)\|_2 \in [1,8], 0 \leqslant y \leqslant x\}$ und $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|(x,y)\|_2 \in [1,8], -x \leqslant y \leqslant 0\}$ zerlegen. Dann ist $\iint_B \frac{y}{x}\, d(x,y) = \iint_{B_1} \frac{y}{x}\, d(x,y) + \iint_{B_2} \frac{y}{x}\, d(x,y)$.) Wir erhalten

$$\iint_B \frac{y}{x}\, d(x,y) = \iint_{[1,8]\times[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]} \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}\, r\, d(r,\varphi) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_1^8 \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\, r\, dr\, d\varphi = \tfrac{1}{2}(8^2 - 1^2) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan\varphi\, d\varphi = 0.$$

Das letzte Gleichheitszeichen ergibt sich, weil der Tangens eine ungerade Funktion ist und über ein zu 0 symmetrisches Intervall integriert wird.

b) Wir greifen auf Zylinderkoordinaten zurück:

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad z = z\,, \qquad d(x,y,z) = r\,d(r,\varphi,z)\,.$$

Für $(x,y,z) \in B$ gilt $0 \leqslant z \leqslant 1$, und die zweite B definierende Ungleichung führt auf die Bedingung $r^2 \leqslant (1-z)^2$. Die Menge B ist also charakterisiert durch

$$0 \leqslant z \leqslant 1\,, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1 - z\,.$$

Die Transformationsformel liefert nun

$$\begin{aligned}
\iiint_B (x^2+y^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} (r^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, r\, dr\, d\varphi\, dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-z} r^5 e^{2(1-z)^7}\, dr\, dz = 2\pi \int_0^1 \left[\tfrac{1}{6} r^6\right]_{r=0}^{1-z} e^{2(1-z)^7}\, dz \\
&= \int_0^1 \tfrac{1}{3}\pi (1-z)^6\, e^{2(1-z)^7}\, dz = \left[-\frac{\pi e^{2(1-z)^7}}{42}\right]_{z=0}^1 = \frac{\pi(e^2-1)}{42}\,.
\end{aligned}$$

c) Definiere $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$. Dann müssen wir

$$m := \iiint_B \varrho(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint_K \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z)$$

berechnen. Hierzu benutzen wir Kugelkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\,\cos\vartheta\,, \qquad y = r\sin\varphi\,\cos\vartheta\,, \qquad z = r\sin\vartheta\,, \qquad d(x,y,z) = r^2\cos\vartheta\, d(r,\varphi,\vartheta)$$

mit $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Die Transformationsformel liefert

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+r^2}\, r^2\cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{1+r^2}\, \cos\vartheta\, d\vartheta\, dr \\
&= 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\, dr = 4\pi \int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+r^2}\Big)\, dr \\
&= 4\pi\big(1 - [\arctan r]_{r=0}^1\big) = 4\pi\big(1 - (\tfrac{\pi}{4} - 0)\big) = 4\pi - \pi^2.
\end{aligned}$$

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Sommersemester 2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt (HM-Stoff)

Aufgabe 57

Eine Parametrisierung des Kegelmantels $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,1]\times[0,2\pi].$$

Mit

$$\left\|\partial_r\vec{g}(r,\varphi)\times\partial_\varphi\vec{g}(r,\varphi)\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{2}\,r$$

und

$$\|\vec{g}(r,\varphi)-\vec{a}\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r-1 \end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{2r^2-2r+1}$$

erhält man

$$\begin{aligned} U(\vec{a}) &= \varrho \iint\limits_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x}-\vec{a}\|_2}\,do = \varrho \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{1}{\|\vec{g}(r,\varphi)-\vec{a}\|_2}\left\|\partial_r\vec{g}(r,\varphi)\times\partial_\varphi\vec{g}(r,\varphi)\right\|_2 d(r,\varphi) \\ &= \varrho\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2r^2-2r+1}}\sqrt{2}\,r\,d\varphi\,dr = 2\sqrt{2}\,\pi\,\varrho\int_0^1\frac{r}{\sqrt{2r^2-2r+1}}\,dr \overset{\text{Hinweis}}{=} -2\pi\varrho\ln(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 58

Die Fläche $\mathcal{F}$ liegt in Parameterdarstellung vor mit

$$\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2-u^2 \end{pmatrix}, \qquad (u,v)\in G := \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,:\, u^2+v^2<3\right\}.$$

Der Integralsatz von Stokes liefert

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{\mathcal{F}} (\nabla\times\vec{v})\cdot d\vec{o} = \iint\limits_{G} (\nabla\times\vec{v})\big(\vec{g}(u,v)\big)\cdot\big(\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)\big)\,d(u,v)\,.$$

Nun ist

$$\partial_u\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}, \quad \partial_v\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\nabla\times\vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 1-(-2) \\ 9-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint_G \begin{pmatrix}4\\3\\14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2u\\-2v\\1\end{pmatrix}\,d(u,v) = \iint_G (8u-6v+14)\,d(u,v)\,;$$

und mit Polarkoordinaten $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$, $d(u,v) = r\,d(r,\varphi)$, $r\in[0,\sqrt{3}]$, $\varphi\in[0,2\pi]$ (G ist die offene Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{3}$) erhält man unter Berücksichtigung von $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}(8r\cos\varphi - 6r\sin\varphi + 14)\,r\,d\varphi\,dr = \int_0^{\sqrt{3}} 28\pi r\,dr \\ &= 28\pi\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{\sqrt{3}} = 28\pi\cdot\tfrac{3}{2} = 42\pi\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 59

a) Die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Zylinders Z besteht aus drei Teilen, nämlich aus der Bodenfläche $\mathcal{F}_1$, der Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ und der oberen Deckfläche $\mathcal{F}_3$.

Die Bodenfläche $\mathcal{F}_1$ können wir durch die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 0)$ mit $(u,v)\in U := [0,1]\times[0,2\pi]$ darstellen (Zylinderkoordinaten mit $z=0$). Es gilt

$$\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-u\sin v\\ u\cos v\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\u\cos^2 v + u\sin^2 v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\u\end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $\vec{N} = (0,0,-1)$ als äußere Einheitsnormale. (Man teilt $\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)$ durch die Norm $\|\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)\|_2$ und wählt dann noch das Vorzeichen so, dass der Vektor nach außen weist.) Also ist $\iint_{\mathcal{F}_1}\vec{v}\cdot\vec{N}\,do = 0$, denn

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = \begin{pmatrix}u^3\cos^3 v\\ u^3\cos^2 v\,\sin v\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = 0\,.$$

Die Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ wird durch $\vec{g}(u,v) := (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u,v)\in U := [0,2\pi]\times[0,1]$ parametrisiert (Zylinderkoordinaten mit festem Radius $r=1$). Wir erhalten

$$\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix}-\sin u\\ \cos u\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix}.$$

Dies ist auch schon die äußere Einheitsnormale $\vec{N}$. Wegen

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = \begin{pmatrix}\cos^3 u\\ \cos^2 u\,\sin u\\ v\cos^2 u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix} = \cos^4 u + \cos^2 u\,\sin^2 u = \cos^2 u$$

folgt

$$\iint_{\mathcal{F}_2}\vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iint_U \cos^2 u\,\underbrace{\|\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)\|_2}_{=\cos^2 u+\sin^2 u=1}\,d(u,v) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2 u\,dv\,du = \int_0^{2\pi}\cos^2 u\,du = \pi\,.$$

Es bleibt noch die Deckfläche $\mathcal{F}_3$: Die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 1)$ mit $(u,v)\in U := [0,1]\times[0,2\pi]$ (Zylinderkoordinaten mit $z=1$) liefert $\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v) = (0,0,u)$. Es ist $\vec{N} = (0,0,1)$ und damit

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = \begin{pmatrix}u^3\cos^3 v\\ u^3\cos^2 v\,\sin v\\ u^2\cos^2 v\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = u^2\cos^2 v\,.$$

Somit erhalten wir

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_3} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iint\limits_{U} u^2\cos^2 v\,\underbrace{\|\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)\|_2}_{=|u|=u,\ \text{da}\ u\geqslant 0}\,d(u,v) = \int_0^1\int_0^{2\pi} u^3\cos^2 v\,dv\,du$$
$$= \left(\int_0^1 u^3\,du\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2 v\,dv\right) = \tfrac{1}{4}\pi\,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \sum_{k=1}^{3}\iint\limits_{\mathcal{F}_k} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = 0+\pi+\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{4}\pi\,.$$

b) Nach dem Divergenzsatz (bzw. dem Gaußschen Integralsatz) ist

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iiint\limits_{Z} (\nabla\cdot\vec{v})(x,y,z)\,d(x,y,z)\,.$$

Nun gilt $(\nabla\cdot\vec{v})(x,y,z) = \partial_x(x^3)+\partial_y(x^2y)+\partial_z(x^2z) = 3x^2+x^2+x^2 = 5x^2$ und mit Zylinderkoordinaten $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, wobei $r\in[0,1]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $z\in[0,1]$, folgt

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iiint\limits_{Z} 5x^2\,d(x,y,z) = \iiint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]} 5(r\cos\varphi)^2\,r\,d(r,\varphi,z)$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 5r^3\cos^2\varphi\,dz\,d\varphi\,dr = \int_0^1\int_0^{2\pi} 5r^3\cos^2\varphi\,d\varphi\,dr$$
$$= 5\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\right) = \tfrac{5}{4}\pi\,.$$

Aufgabe 60

$\vec{N}$ sei stets die Einheitsnormale auf ∂K, die ins Äußere von K gerichtet ist. Für den Fluss des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen gilt

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{f}\cdot\vec{N}\,do.$$

Die Oberfläche ∂K besteht aus dem Kegelmantel und dem Grundkreis. Wir parametrisieren zunächst den Kegelmantel

$$M := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ z = 2-\sqrt{x^2+y^2},\ z\geqslant 0\right\}$$

durch

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\\2-r\end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi)\in[0,2]\times[0,2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r\vec{g}(r,\varphi)\times\partial_\varphi\vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\\ r\end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor auf M im Punkt $\vec{g}(r,\varphi)\in M$, der ins Äußere des Kegels K zeigt (weil z.B. die 3. Komponente positiv ist). Weiter gilt

$$\vec{f}(\vec{g}(r,\varphi))\cdot\big(\partial_r\vec{g}(r,\varphi)\times\partial_\varphi\vec{g}(r,\varphi)\big) = \begin{pmatrix}2-r\\ r\sin\varphi\\ 3-r\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\\ r\end{pmatrix} = (2-r)r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3-r)r$$
$$= (2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2).$$

Für den Fluss von $\vec{f}$ durch die Mantelfläche M nach außen erhält man

$$\begin{aligned}\iint\limits_M \vec{f}\cdot\vec{N}\,do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{f}(\vec{g}(r,\varphi))\cdot\frac{\partial_r\vec{g}(r,\varphi)\times\partial_\varphi\vec{g}(r,\varphi)}{\|\partial_r\vec{g}(r,\varphi)\times\partial_\varphi\vec{g}(r,\varphi)\|_2}\,\|\partial_r\vec{g}(r,\varphi)\times\partial_\varphi\vec{g}(r,\varphi)\|_2\,d(r,\varphi)\\
&= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{f}(\vec{g}(r,\varphi))\cdot\big(\partial_r\vec{g}(r,\varphi)\times\partial_\varphi\vec{g}(r,\varphi)\big)\,d(r,\varphi)\\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi}\big((2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2)\big)\,d\varphi\,dr\\
&= \int_0^2\big(\pi r^2 + (3r-r^2)2\pi\big)\,dr = \Big[\pi\,\frac{r^3}{3} + \Big(\frac{3}{2}\,r^2 - \frac{r^3}{3}\Big)\,2\pi\Big]_0^2 = \frac{28}{3}\,\pi.\end{aligned}$$

Eine Parametrisierung des Grundkreises

$$G := \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2\leqslant 4,\ z=0\big\}$$

ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\\0\end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi)\qquad\text{mit } (r,\varphi)\in[0,2]\times[0,2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r\vec{g}(r,\varphi)\times\partial_\varphi\vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\r\cos\varphi\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor auf G im Punkt $\vec{g}(r,\varphi)\in G$, der ins Innere des Kegels K zeigt (weil die 3. Komponente positiv ist). Wegen

$$\vec{f}(\vec{g}(r,\varphi))\cdot\big(-\partial_r\vec{g}(r,\varphi)\times\partial_\varphi\vec{g}(r,\varphi)\big) = \begin{pmatrix}0\\r\sin\varphi\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-r\end{pmatrix} = -r$$

ergibt sich für den Fluss von $\vec{f}$ durch die Grundfläche G nach außen

$$\begin{aligned}\iint\limits_G \vec{f}\cdot\vec{N}\,do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} f(\vec{g}(r,\varphi))\cdot\big(-\partial_r\vec{g}(r,\varphi)\times\partial_\varphi\vec{g}(r,\varphi)\big)\,d(r,\varphi)\\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi} -r\,d\varphi\,dr = -\int_0^2 2\pi r\,dr = -4\pi.\end{aligned}$$

Der Fluss von $\vec{f}$ durch die Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen beträgt somit

$$\iint\limits_{\partial K}\vec{f}\cdot\vec{N}\,do = \iint\limits_M \vec{f}\cdot\vec{N}\,do + \iint\limits_G \vec{f}\cdot\vec{N}\,do = \frac{28}{3}\,\pi - 4\pi = \frac{16}{3}\,\pi.$$

Alternativ: Man kann $\iint_{\partial K}\vec{f}\cdot\vec{N}\,do$ auch mit dem Divergenzsatz (bzw. dem Gaußschen Integralsatz) im $\mathbb{R}^3$ berechnen:

$$\iint\limits_{\partial K}\vec{f}\cdot\vec{N}\,do = \iiint\limits_K \nabla\cdot\vec{f}\,d\tau = \iiint\limits_K 2\,d(x,y,z)\,,$$

wobei wir hier $d\tau$ für $d(x,y,z)$ geschrieben und

$$(\nabla\cdot\vec{f})(x,y,z) = \begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z\\y\\z+1\end{pmatrix} = \partial_x(z)+\partial_y(y)+\partial_z(z+1) = 0+1+1 = 2$$

verwendet haben. Mit Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad z = z\,, \qquad d(x,y,z) = r\,d(r,\varphi,z)$$

lässt sich K charakterisieren durch

$$r \in [0,2]\,, \qquad \varphi \in [0,2\pi]\,, \qquad z \in [0,2-r]\,,$$

so dass folgt

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\partial K} \vec{f}\cdot\vec{N}\,do &= 2\iiint\limits_{K} d(x,y,z) = 2\int_0^2\int_0^{2-r}\int_0^{2\pi} r\,d\varphi\,dz\,dr \\ &= 4\pi\int_0^2\int_0^{2-r} r\,dz\,dr = 4\pi\int_0^2 (2r-r^2)\,dr = 4\pi\big[r^2-\tfrac{1}{3}\,r^3\big]_0^2 = \frac{16}{3}\,\pi\,.\end{aligned}$$

Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2012
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt (KAI-Stoff)

Aufgabe 61

a) Wir zeigen zuerst: Ist $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist die Funktion $f_n(t) := t^n$ von exponentieller Ordnung ε für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Stellen wir die Exponentialfunktion als Potenzreihe dar, erhalten wir

$$e^{\varepsilon t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon t)^k}{k!} = 1 + \varepsilon t + \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\varepsilon t)^n}{n!} + \ldots \geqslant \frac{(\varepsilon t)^n}{n!}$$

für alle $t \geqslant 0$. Folglich ergibt sich mit $M := \frac{n!}{\varepsilon^n}$ die Abschätzung

$$t^n \leqslant M e^{\varepsilon t}$$

für alle $t \geqslant 0$. Also ist die Funktion f_n von exponentieller Ordnung ε.

Gegeben seien nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $s_0 \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s_0) > 0$. Wir wollen die Existenz von $\mathscr{L}\{f_n\}(s_0)$ nachweisen.
Wie eben gesehen, ist $f_n(t) = t^n$ von exponentieller Ordnung ε für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$. Insbesondere ist dann f_n von exponentieller Ordnung $\varepsilon_0 := \mathrm{Re}(s_0)/2$. Nach Satz 8.4 konvergiert daher das Integral $\int_0^\infty e^{-st} f_n(t)\, dt$ (sogar absolut) für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \varepsilon_0$. Aufgrund von $\mathrm{Re}(s_0) > \varepsilon$ existiert demnach $\mathscr{L}\{f_n\}(s_0)$.

b) Die Behauptung zeigen wir durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.
IA: $n = 0$. Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 0$ gilt nach Beispiel 8.2 (a)

$$\mathscr{L}\{f_0\}(s) = \mathscr{L}\{t^0\}(s) = \mathscr{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s} = \frac{0!}{s^{0+1}}\,.$$

IS: Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte: $\mathscr{L}\{f_n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ (IV). Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f_{n+1}\}(s) &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} t^{n+1}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s}\, t^{n+1}\right]_{t=0}^b + \frac{n+1}{s} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} t^n\, dt \\ &= 0 + \frac{n+1}{s} \mathscr{L}\{f_n\}(s) \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n+1}{s}\, \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{(n+1)+1}}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 62

Sei $a > 0$. Da f von exponentieller Ordnung γ ist, gibt es eine Konstante $M > 0$ so, dass

$$|f(x)| \leqslant M e^{\gamma x}$$

für alle $x \geqslant 0$ gilt. Setzen wir in diese Ungleichung at für x ein, dann erhalten wir

$$|f(at)| \leqslant M e^{(\gamma a)t}$$

für alle $t \geqslant 0$. Damit ist die Funktion $t \mapsto f(at)$ von exponentieller Ordnung γa, und deshalb konvergiert $\mathscr{L}\{f(at)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \gamma a$. Mit Hilfe der Substitution $\tau = at$, $d\tau = a\, dt$ erkennen wir

$$\mathscr{L}\{f(at)\}(s) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(at)\, dt = \frac{1}{a} \lim_{b\to\infty} \int_0^{ab} e^{-(s/a)\tau} f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{a} \mathscr{L}\{f\}\Big(\frac{s}{a}\Big)\,.$$

Aufgabe 63

a) Mit $g(t) := t^2 + bt + c$ erhält man nach Aufgabe 61 aufgrund der Linearität von $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}\{g\}(s) = \mathscr{L}\{t^2\}(s) + b\,\mathscr{L}\{t\}(s) + c\,\mathscr{L}\{1\}(s) = \tfrac{2}{s^3} + \tfrac{b}{s^2} + \tfrac{c}{s} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0\,,$$

und wegen $f(t) = e^{at}g(t)$ gilt dann nach der Dämpfungsregel

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \mathscr{L}\{g\}(s-a) = \tfrac{2}{(s-a)^3} + \tfrac{b}{(s-a)^2} + \tfrac{c}{s-a} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > a\,.$$

b) Wir benutzen die Darstellung $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$. Nach der Dämpfungsregel ist

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\}(s) &= \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{e^{i\omega t}\}(s) + \mathscr{L}\{e^{-i\omega t}\}(s)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{\sigma\}(s-i\omega) + \mathscr{L}\{\sigma\}(s+i\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\Big) = \frac{1}{2}\frac{(s+i\omega)+(s-i\omega)}{s^2 - i^2\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: a) Mit $\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$ erhält man $\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$.
b) Alternativ könnte man $\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\}(s)$ im Fall $\omega > 0$ auch mit $\mathscr{L}\{\cos(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$ und dem Skalierungsresultat aus Aufgabe 62 berechnen: Hiernach gilt nämlich für jedes $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{\omega}\mathscr{L}\{\cos(t)\}\Big(\frac{s}{\omega}\Big) = \frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{(s/\omega)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

c) Es ist $\sinh(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$. Da die Laplacetransformation linear ist, bekommen wir nach der Dämpfungsregel für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > |\omega|$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f\}(s) &= \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{e^{\omega t}\}(s) - \mathscr{L}\{e^{-\omega t}\}(s)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{\sigma\}(s-\omega) - \mathscr{L}\{\sigma\}(s+\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\Big) = \frac{1}{2}\frac{(s+\omega)-(s-\omega)}{s^2-\omega^2} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}\,.\end{aligned}$$

Wir mussten hier $\mathrm{Re}(s) > |\omega|$ fordern, damit sowohl $\mathscr{L}\{e^{\omega t}\}(s)$ als auch $\mathscr{L}\{e^{-\omega t}\}(s)$ existieren. Bekanntlich liegt Konvergenz von $\mathscr{L}\{e^{\omega t}\}(s)$ nur für $\mathrm{Re}(s) > \omega$ vor, entsprechend konvergiert $\mathscr{L}\{e^{-\omega t}\}(s)$ nur für $\mathrm{Re}(s) > -\omega$. Beide Bedingungen an s sind für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > |\omega|$ erfüllt.

d) Wir drücken die Funktion f zunächst mit Hilfe der Exponentialfunktion aus: Es ist

$$f(t) = \sinh^2(\omega t) = \left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\omega t} - 2 + e^{-2\omega t}}{4}\,.$$

Damit folgt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 2|\omega|$ (analoge Begründung wie zuvor im c)-Teil)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f\}(s) &= \frac{1}{4}\left(\mathscr{L}\{e^{2\omega t}\}(s) - \mathscr{L}\{2\}(s) + \mathscr{L}\{e^{-2\omega t}\}(s)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2\omega} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2\omega}\right)\\ &= \frac{s}{2(s^2-4\omega^2)} - \frac{1}{2s} = \frac{2\omega^2}{s(s^2-4\omega^2)}\,.\end{aligned}$$

e) Für $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$ gilt nach der Dämpfungsregel und der Bemerkung a) im b)-Teil

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \mathscr{L}\{\sin(bt)\}(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}\,.$$

f) Für jedes $t \geqslant 0$ gilt nach dem Additionstheorem des Sinus

$$f(t) = \sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi\,.$$

Hieraus folgt mit Hilfe des b)- und e)-Teils für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \cos\varphi\,\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\}(s) + \sin\varphi\,\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = \cos\varphi\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \sin\varphi\,\frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

g) Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt $\mathscr{L}\{\sin(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Mit $g(t) := e^t \sin(t)$ liefert die Dämpfungsregel

$$\mathscr{L}\{g\}(s) = \mathscr{L}\{\sin(t)\}(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2+1} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1\,.$$

Wegen $f(t) = (\tau_1 g)(t) = \begin{cases} e^{t-1}\sin(t-1) & t \geqslant 1 \\ 0 & t \in [0,1) \end{cases}$ haben wir nach der Verschiebungsregel

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = e^{-1\cdot s}\mathscr{L}\{g\}(s) = \frac{e^{-s}}{(s-1)^2+1} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1\,.$$

h) Nach Definition ist

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-st} t\,dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)\,dt\,.$$

Diese Integrale sind für alle $s \in \mathbb{C}$ (absolut) konvergent. Wir unterscheiden zwei Fälle: Für $s = 0$ ist $\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_0^1 t\,dt + \int_1^2 (2-t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Im Fall $s \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ liefert partielle Integration

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f\}(s) &= \int_0^1 e^{-st} t\,dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)\,dt \\
&= \Big(\frac{e^{-st}}{-s}t\Big)\Big|_{t=0}^{1} - \int_0^1 \frac{e^{-st}}{-s}\,dt + \Big(\frac{e^{-st}}{-s}(2-t)\Big)\Big|_{t=1}^{2} - \int_1^2 \frac{e^{-st}}{s}\,dt \\
&= -\frac{1}{s}e^{-s} - \Big(\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big)\Big|_{t=0}^{1} + \frac{1}{s}e^{-s} + \Big(\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big)\Big|_{1}^{2} \\
&= \frac{1}{s^2}\Big(-e^{-s}+1\Big) + \frac{1}{s^2}\Big(e^{-2s} - e^{-s}\Big) = \frac{1}{s^2}\Big(e^{-2s} - 2e^{-s} + 1\Big) = \frac{1}{s^2}\Big(e^{-s} - 1\Big)^2.
\end{aligned}$$

Alternativ: Wie in der Übung am 29.06. nachgerechnet, ist $f = g{*}g$ mit $g(t) := \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t > 1 \end{cases}$.
Für jedes $s \in \mathbb{C}$ gilt nach Beispiel 8.2 (c) der Vorlesung $\mathscr{L}\{g\}(s) = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ \frac{1-e^{-s}}{s} & s \neq 0 \end{cases}$, so dass man mit der Faltungsregel $\mathscr{L}\{f\}(s) = \mathscr{L}\{g{*}g\}(s) = \mathscr{L}\{g\}(s)\,\mathscr{L}\{g\}(s) = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} & s \neq 0 \end{cases}$ erhält.

Aufgabe 64

a) Ist $f(t) := e^{at}$, $t \geqslant 0$, gesetzt, so ergibt sich nach Beispiel 8.2 (b): $\mathscr{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$.

b) Wir definieren $g(t) := e^{-2t}$, $t \geqslant 0$. Dann gilt $\mathscr{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s+2}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > -2$. Ist $f(t) := (\tau_3 g)(t) = \begin{cases} e^{-2(t-3)} & t \geqslant 3 \\ 0 & t \in [0,3) \end{cases}$ gesetzt, dann gilt nach der Verschiebungsregel

$$\frac{e^{-3s}}{s+2} = e^{-3s}\mathscr{L}\{g\}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)\,.$$

c) Aufgrund von $\mathscr{L}\{\cos(2t)\}(s) = \frac{s}{s^2+2^2}$ und $\mathscr{L}\{\sin(2t)\}(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$ (für $\mathrm{Re}\,s > 0$) bekommen wir mit Hilfe der Linearität von $\mathscr{L}$ und der Dämpfungsregel für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,s > -1$

$$\begin{aligned}
\frac{s+3}{(s+1)^2+4} &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{2}{(s+1)^2+4} = \mathscr{L}\{\cos(2t)\}(s+1) + \mathscr{L}\{\sin(2t)\}(s+1) \\
&= \mathscr{L}\{\cos(2t) + \sin(2t)\}(s+1) = \mathscr{L}\{e^{-t}(\cos(2t) + \sin(2t))\}(s)\,.
\end{aligned}$$

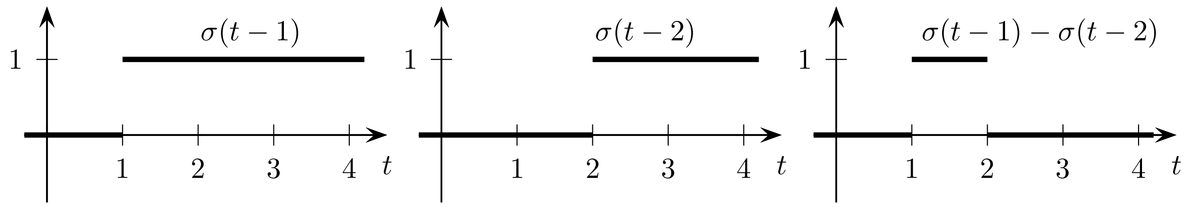
Demnach gilt $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2+4}$ für $f(t) := e^{-t}(\cos(2t) + \sin(2t))$, $t \geqslant 0$.

Aufgabe 65

Dem Schaubild kann man sofort

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } t \in [1,2), \\ 1 & \text{für } t \in [2,3), \\ 3 & \text{für } t \in [3,4), \\ -1 & \text{für } t \in [4,6), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ ablesen. Diese Fallunterscheidung wollen wir mit Hilfe des Einheitssprungs σ ausdrücken. Wie man sich beispielsweise anhand der Graphen



überlegt, gilt

$$\sigma(t-1) - \sigma(t-2) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [1,2), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsprechendes erhält man für die anderen Fälle. Damit kann man die Funktion f mit Hilfe des Einheitssprungs σ in einem geschlossenen Ausdruck angeben

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\big(\sigma(t-1) - \sigma(t-2)\big) + 1\big(\sigma(t-2) - \sigma(t-3)\big) + 3\big(\sigma(t-3) - \sigma(t-4)\big) \\ &\quad - \big(\sigma(t-4) - \sigma(t-6)\big) \\ &= 2\sigma(t-1) - \sigma(t-2) + 2\sigma(t-3) - 4\sigma(t-4) + \sigma(t-6)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Nach der Verschiebungsregel gilt für jedes $a \geqslant 0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}\{\sigma(t-a)\}(s) = \mathscr{L}\{\tau_a\sigma\}(s) = e^{-as}\mathscr{L}\{\sigma\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}\,.$$

Hiermit ergibt sich aufgrund der Linearität von $\mathscr{L}$ für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s}\left(2e^{-s} - e^{-2s} + 2e^{-3s} - 4e^{-4s} + e^{-6s}\right).$$

Aufgabe 66

a) *Erinnerung an die geometrische Reihe:* Sei $\omega \in \mathbb{C}$ mit $|\omega| < 1$. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} \omega^k$ absolut konvergent, und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \omega^k = \frac{1}{1-\omega}$.

Es seien $T > 0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$. Setze $A := \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$ sowie $\omega := e^{-sT}$.

Zu zeigen ist also $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1-\omega}\,A$.

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt aufgrund der T-Periodizität von f

$$\begin{aligned} \int_0^{(N+1)T} e^{-st} f(t)\,dt &= \sum_{k=0}^{N} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t)\,dt \overset{r:=t-kT}{=} \sum_{k=0}^{N} \int_0^T e^{-s(r+kT)} \underbrace{f(r+kT)}_{=f(r)}\,dr \\ &= \sum_{k=0}^{N} e^{-skT} \int_0^T e^{-sr} f(r)\,dr = \sum_{k=0}^{N} \omega^k A = A \sum_{k=0}^{N} \omega^k\,. \end{aligned}$$

Für $N \to \infty$ ergibt sich wegen $|\omega| = e^{-\mathrm{Re}(s)\,T} < 1$

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = A \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k = \frac{A}{1-\omega} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt\,.$$

b) Sei $a > 0$. Da die Funktion f (stückweise) stetig und periodisch mit der Periode $T = 2a$ ist, lässt sich $\mathscr{L}\{f\}$ nach Teil a) durch

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} \int_0^{2a} e^{-st} f(t)\, dt, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0, \tag{1}$$

berechnen. Um das Integral $\int_0^{2a} e^{-st} f(t)\, dt$ zu bestimmen, definieren wir

$$g(t) := \begin{cases} t & \text{für } 0 \leqslant t < 1 \\ 2 - t & \text{für } 1 \leqslant t < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt gemäß Aufgabe 63 h): $\mathscr{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s^2}(e^{-s} - 1)^2$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$. Ist

$$g_a(t) := g(t/a) = \begin{cases} t/a & \text{für } 0 \leqslant t < a \\ 2 - t/a & \text{für } a \leqslant t < 2a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

gesetzt, so folgt mit dem Skalierungsresultat aus Aufgabe 62

$$\mathscr{L}\{g_a\}(s) = \frac{1}{1/a}\, \mathscr{L}\{g\}\Big(\frac{s}{1/a}\Big) = a\mathscr{L}\{g\}(as) = \frac{1}{as^2}(e^{-as} - 1)^2, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Nun gilt aber $f(t) = g_a(t)$ für alle $t \in [0, 2a)$; da ferner $g_a(t) = 0$ für alle $t \geqslant 2a$ ist, ergibt sich für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\int_0^{2a} e^{-st} f(t)\, dt = \mathscr{L}\{g_a\}(s) = \frac{1}{as^2}(e^{-as} - 1)^2\,.$$

[Natürlich könnte man $\int_0^{2a} e^{-st} f(t)\, dt$ auch direkt mittels partieller Integration berechnen.] Mit (1) folgt hieraus für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} \cdot \frac{1}{as^2}(e^{-as} - 1)^2 = \frac{1}{as^2} \cdot \frac{(1 - e^{-as})^2}{(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} = \frac{1}{as^2} \cdot \frac{1 - e^{-as}}{1 + e^{-as}}\,.$$

Aufgabe 67

Um eine Funktion $y\colon [0, \infty) \to \mathbb{C}$ mit

$$y(t) = t^3 + \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau)\, d\tau \qquad \text{für alle } t \geqslant 0 \tag{$*$}$$

anzugeben, schreiben wir die rechte Seite mit Hilfe der Faltung

$$y(t) = t^3 + (y * \sin)(t)$$

und wenden die Faltungsregel an. Für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$ gilt

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{t^3\}(s) + \mathscr{L}\{y * \sin\}(s) = \mathscr{L}\{t^3\}(s) + \mathscr{L}\{y\}(s)\, \mathscr{L}\{\sin\}(s)\,.$$

Hieraus folgt wegen $\mathscr{L}\{t^3\}(s) = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$ und $\mathscr{L}\{\sin\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{6}{s^4} + \mathscr{L}\{y\}(s)\, \frac{1}{s^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{L}\{y\}(s)\Big(1 - \frac{1}{s^2+1}\Big) = \frac{6}{s^4}$$

bzw.

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{s^2+1}{s^2} \cdot \frac{6}{s^4} = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^6}\,.$$

Schließlich erhalten wir mit $\mathscr{L}\{t^5\}(s) = \frac{5!}{s^6}$

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{t^3\}(s) + \frac{6}{5!}\, \mathscr{L}\{t^5\}(s) = \mathscr{L}\{t^3 + t^5/20\}(s),$$

d.h. $y(t) = t^3 + \frac{1}{20} t^5$, $t \geqslant 0$, löst die gegebene Gleichung von $(*)$.

Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2012
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 68

a) **i)** Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung richtet sich nach den Nullstellen des Nennerpolynoms $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$. Diese sind $-1, 0, 2$. Jede dieser Nullstellen ist einfach. Demzufolge lautet der Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}\,.$$

Um die Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$ zu ermitteln, haben wir verschiedene Möglichkeiten.
1. Möglichkeit: Wir multiplizieren obige Gleichung mit dem Hauptnenner $x(x+1)(x-2)$

$$x^2 + x - 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1) \tag{1}$$

und setzen die Nullstellen des Nennerpolynoms ein

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad -1 = -2A &&\iff A = 1/2\\ x = -1: &\quad -1 = 3B &&\iff B = -1/3\\ x = 2: &\quad 5 = 6C &&\iff C = 5/6 \end{aligned}$$

Alternativ könnte man in (1) auch einen Koeffizientenvergleich durchführen:

$$\begin{aligned} x^2: &\quad 1 = A + B + C\\ x: &\quad 1 = -A - 2B + C\\ 1: &\quad -1 = -2A \end{aligned}$$

Aus diesem linearen Gleichungssystem lassen sich dann die Werte von A, B, C berechnen.
2. Möglichkeit: Um A, den Koeffizienten des zur Nullstelle $\lambda = 0$ gehörenden Terms $\frac{1}{x}$, zu ermitteln, multipliziert man $\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}$ mit $x - \lambda = x$ und bildet dann den Grenzwert $x \to \lambda$, also $x \to 0$. Formal ausgedrückt bedeutet dies

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}\cdot x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}\,.$$

Entsprechend kann man für B und C verfahren

$$B = \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}\cdot (x+1)\right) = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x-1}{x(x-2)} = -\frac{1}{3}\,,$$
$$C = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}\cdot (x-2)\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-1}{x(x+1)} = \frac{5}{6}\,.$$

Mit den Koeffizienten $A = 1/2$, $B = -1/3$ sowie $C = 5/6$ ergibt sich

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{5}{6(x-2)}\,.$$

ii) Wiederum müssen zunächst die Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmt werden. Durch "scharfes Hinsehen" erkennen wir, dass -1 eine solche ist. Polynomdivision liefert $x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 - 1)(x + 1)$, und wegen $(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$ ergibt sich

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2 \,.$$

Damit ist 1 eine einfache Nullstelle und -1 eine doppelte Nullstelle des Nennerpolynoms. Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung ist daher

$$\frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x + 1)} + \frac{C}{(x + 1)^2} \,.$$

1. Möglichkeit: Nach Multiplikation mit $(x - 1)(x + 1)^2$ ist

$$x = A(x + 1)^2 + B(x + 1)(x - 1) + C(x - 1) = A(x^2 + 2x + 1) + B(x^2 - 1) + C(x - 1) \,.$$

Setzen wir die Nullstellen -1 und 1 hierin ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} x = -1: &\qquad -1 = -2C &\iff&\quad C = 1/2 \\ x = 1: &\qquad 1 = 4A &\iff&\quad A = 1/4 \end{aligned}$$

Um B zu bestimmen, können wir einen beliebigen anderen Wert für x einsetzen. Wir wählen $x = 0$, weil dann die linke Seite der Gleichung verschwindet:

$$0 = A - B - C = \frac{1}{4} - B - \frac{1}{2} \quad\iff\quad B = -\frac{1}{4} \,.$$

Alternativ können wir zur Bestimmung von B auch die Gleichung $x = A(x^2 + 2x + 1) + B(x^2 - 1) + C(x - 1)$ auf beiden Seiten nach x ableiten

$$1 = A(2x + 2) + 2xB + C$$

und dann einen speziellen Wert für x einsetzen, z.B. $x = -1$

$$1 = 0 - 2B + C = -2B + 1/2 \quad\iff\quad B = -1/4 \,.$$

2. Möglichkeit: Zur Bestimmung von A, B, C könnten wir auch einen Koeffizientenvergleich durchführen, der auf ein lineares Gleichungssystem führt

$$\begin{aligned} x^2: &\qquad 0 = A + B \\ x: &\qquad 1 = 2A + \phantom{B - {}} C \\ 1: &\qquad 0 = A - B - C \end{aligned}$$

beziehungsweise geschrieben als

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) .$$

Jedenfalls liefern beide Möglichkeiten $A = 1/4$, $B = -1/4$, $C = 1/2$. Folglich ist

$$\frac{x}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{1}{4(x - 1)} - \frac{1}{4(x + 1)} + \frac{1}{2(x + 1)^2} \,.$$

iii) Offenbar ist 2 eine Nullstelle des Nennerpolynoms $8 - x^3$. Mit Hilfe der Polynomdivision $(-x^3 + 8) : (x - 2)$ sehen wir

$$8 - x^3 = -(x-2)(x^2 + 2x + 4)\,.$$

Das Polynom x^2+2x+4 hat die beiden nichtreellen Nullstellen $-1+\sqrt{3}i$ und $-1-\sqrt{3}i$. Damit lautet der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung

$$\frac{x}{8-x^3} = \frac{-x}{(x-2)(x-(-1+\sqrt{3}i))(x-(-1-\sqrt{3}i))} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-(-1+\sqrt{3}i)} + \frac{C}{x-(-1-\sqrt{3}i)}\,.$$

(In der Notation aus Abschnitt 8.11 der Vorlesung ausgedrückt, liegt die folgende Situation vor: $P(x) = -x$, $Q(x) = x^3 - 8$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1 + \sqrt{3}i$ und $\lambda_3 = -1 - \sqrt{3}i$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ sowie $\alpha_1^{(1)} = A$, $\alpha_1^{(2)} = B$ und $\alpha_1^{(3)} = C$.)

Nun müssen wir die Koeffizienten A, B, C bestimmen. Hierzu multiplizieren wir obige Gleichung mit dem Hauptnenner $(x-2)(x-(-1+\sqrt{3}i))(x-(-1-\sqrt{3}i))$ durch

$$-x = A(x-(-1+\sqrt{3}i))(x-(-1-\sqrt{3}i)) + B(x-2)(x-(-1-\sqrt{3}i)) + C(x-2)(x-(-1+\sqrt{3}i))\,.$$

Einsetzen der Nullstellen des Nennerpolynoms ergibt

$$\begin{aligned}
x = 2: &\qquad -2 = A(3-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i) = 12A\,,\\
x = -1+\sqrt{3}i: &\qquad 1-\sqrt{3}i = B(-3+\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}i) = -6B(1+\sqrt{3}i)\,,\\
x = -1-\sqrt{3}i: &\qquad 1+\sqrt{3}i = C(-3-\sqrt{3}i)(-2\sqrt{3}i) = -6C(1-\sqrt{3}i)\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
A &= -1/6\,,\\
B &= -\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{1+3} = \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12}i\,,\\
C &= -\frac{1}{6}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{1+3} = \frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}i\,.
\end{aligned}$$

Als Endergebnis für die komplexe Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{x}{8-x^3} = -\frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{\frac{1}{12}+\frac{\sqrt{3}}{12}i}{x-(-1+\sqrt{3}i)} + \frac{\frac{1}{12}-\frac{\sqrt{3}}{12}i}{x-(-1-\sqrt{3}i)}\,.$$

Reelle Partialbruchzerlegung: Wie oben gesehen, besitzt das Polynom $x^2 + 2x + 4$ keine reelle Nullstelle. Der Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung ist daher

$$\frac{x}{8-x^3} = \frac{-x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{\widetilde{B}x + \widetilde{C}}{x^2+2x+4}\,.$$

Beispielsweise nach Multiplikation mit $(x-2)(x^2+2x+4)$ durch Koeffizientenvergleich oder durch Einsetzen beliebiger Werte für x ergibt sich

$$A = -1/6, \qquad \widetilde{B} = 1/6, \qquad \widetilde{C} = -1/3\,.$$

Insgesamt haben wir

$$\frac{x}{8-x^3} = \frac{-x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = -\frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}}{x^2+2x+4}\,.$$

b) **i)** Wegen $(x+1)^2(x^3+1) = (x+1)^3(x^2-x+1) = (x+1)^3(x-\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2})(x-\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2})$ sind -1 eine dreifache Nullstelle und $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ bzw. $\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ jeweils eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms. Deshalb lautet der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^3+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x-\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}} + \frac{E}{x-\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}}\,.$$

(In der Notation von Abschnitt 8.11 geschrieben: $P(x) = 1$, $Q(x) = (x+1)^2(x^3+1)$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ und $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$, $k_1 = 3$, $k_2 = k_3 = 1$ sowie $\alpha_1^{(1)} = A$, $\alpha_2^{(1)} = B$ $\alpha_3^{(1)} = C$, $\alpha_1^{(2)} = D$ und $\alpha_1^{(3)} = E$.) Ergebnis: $A = \frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{9}$, $E = -\frac{1}{9}$.
Der Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^3+1)} = \frac{1}{(x+1)^3(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{\widetilde{D}x+\widetilde{E}}{x^2-x+1}\,.$$

Ergebnis: $A = \frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$, $\widetilde{D} = -\frac{2}{9}$, $\widetilde{E} = \frac{1}{9}$.

ii) Es gilt: $x^6 - x^2 = x^2(x^4-1) = x^2(x^2-1)(x^2+1) = x^2(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$. Also ist 0 eine doppelte Nullstelle, während die Nullstellen $1, -1, i, -i$ jeweils einfach sind. Der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{1}{x^6-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{x-i} + \frac{F}{x+i}\,.$$

Ergebnis: $A = 0$, $B = -1$, $C = \frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$, $E = -\frac{1}{4}i$, $F = \frac{1}{4}i$.
Für die reelle Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{1}{x^6-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{\widetilde{E}x+\widetilde{F}}{x^2+1}\,.$$

Ergebnis: $A = 0$, $B = -1$, $C = \frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$, $\widetilde{E} = \frac{1}{2}$, $\widetilde{F} = 0$.

Aufgabe 69

a) Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\Big)\,.$$

Wegen $\frac{1}{s-1} = \mathscr{L}\{1\}(s-1) = \mathscr{L}\{e^{1\cdot t}\}(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und $\frac{1}{s+1} = \mathscr{L}\{1\}(s+1) = \mathscr{L}\{e^{(-1)\cdot t}\}(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > -1$ erhalten wir für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{e^{1\cdot t}\}(s) - \mathscr{L}\{e^{(-1)\cdot t}\}(s)\Big) = \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\Big\}(s) = \mathscr{L}\Big\{\sinh(t)\Big\}(s)\,.$$

Alternativ: Nach der Faltungsregel gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{s+1} = \mathscr{L}\{e^t\}(s)\,\mathscr{L}\{e^{-t}\}(s) = \mathscr{L}\{g_1\}(s)\,\mathscr{L}\{g_2\}(s) = \mathscr{L}\{g_1 * g_2\}(s)\,,$$

wobei $g_1(t) := e^t$ und $g_2(t) := e^{-t}$ gesetzt seien. Also fanden wir mit der Faltung $g_1 * g_2$ eine Funktion mit $\mathscr{L}\{g_1 * g_2\}(s) = \frac{1}{s^2-1}$. Nun müssen wir noch $g_1 * g_2$ berechnen. Für $t \geqslant 0$ ist

$$\begin{aligned}(g_1 * g_2)(t) &= \int_0^t g_1(t-u)g_2(u)\,du = \int_0^t e^{t-u}e^{-u}\,du = e^t\int_0^t e^{-2u}\,du \\ &= e^t\Big(-\frac{1}{2}e^{-2u}\Big)\Big|_{u=0}^t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh(t)\,.\end{aligned}$$

b) Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2}$$

erkennen wir für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{2}\mathscr{L}\{1\}(s) - \frac{1}{2}\mathscr{L}\{e^{-2t}\}(s) = \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\Big\}(s)\,.$$

Alternativ: Wir können den **b)**-Teil auch lösen, indem wir die Dämpfungsregel auf das Resultat des **a)**-Teils anwenden. Es gilt nämlich für alle $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2+2s} &= \frac{1}{(s+1)^2-1} \overset{\mathbf{a)}}{=} \mathscr{L}\big\{\sinh(t)\big\}(s+1) = \mathscr{L}\big\{e^{-1\cdot t}\sinh(t)\big\}(s)\\ &= \mathscr{L}\Big\{e^{-t}\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\Big\}(s) = \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\Big\}(s)\,.\end{aligned}$$

c) Der Ansatz

$$\frac{s+3}{s^3+4s^2} = \frac{s+3}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+4}$$

führt auf

$$A = \frac{1}{16}\,,\quad B = \frac{3}{4}\,,\quad C = -\frac{1}{16}\,.$$

Damit gilt für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\frac{s+3}{s^3+4s^2} &= \frac{1}{16}\frac{1}{s} + \frac{3}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{s+4} = \frac{1}{16}\mathscr{L}\{1\}(s) + \frac{3}{4}\mathscr{L}\{t\}(s) - \frac{1}{16}\mathscr{L}\{e^{-4t}\}(s)\\ &= \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{16} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{16}e^{-4t}\Big\}(s)\,.\end{aligned}$$

d) Es sei $a > 0$ fest gewählt. Hier hilft uns reelle Partialbruchzerlegung weiter:

$$\frac{s+a}{s(s^2+a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+a^2}$$

für gewisse Konstanten $A, B, C \in \mathbb{R}$. Wir schließen

$$A = \frac{1}{a}\,,\quad B = -\frac{1}{a}\,,\quad C = 1$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{s+a}{s(s^2+a^2)} &= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s} + \frac{-s/a+1}{s^2+a^2}\\ &= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\cdot\frac{s}{s^2+a^2} + \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\,.\end{aligned}$$

Nun erinnern wir uns an

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\cos(at)\}(s) &= \frac{s}{s^2+a^2} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0),\\ \mathscr{L}\{\sin(at)\}(s) &= \frac{a}{s^2+a^2} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)\end{aligned}$$

und erhalten schließlich für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\frac{s+a}{s(s^2+a^2)} &= \frac{1}{a}\mathscr{L}\{1\}(s) - \frac{1}{a}\mathscr{L}\{\cos(at)\}(s) + \frac{1}{a}\mathscr{L}\{\sin(at)\}(s)\\ &= \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{a}\big(1-\cos(at)+\sin(at)\big)\Big\}(s)\,.\end{aligned}$$

Komplexe Partialbruchzerlegung führt natürlich auch zum Ziel. Hier lautet der Ansatz

$$\frac{s+a}{s(s^2+a^2)} = \frac{s+a}{s(s-ia)(s+ia)} = \frac{A}{s} + \frac{\widetilde{B}}{s-ia} + \frac{\widetilde{C}}{s+ia}$$

bzw.

$$s+a = A(s-ia)(s+ia) + \widetilde{B}s(s+ia) + \widetilde{C}s(s-ia)\,.$$

Einsetzen der Nullstellen des Nennerpolynoms liefert

$$\begin{aligned}
s = 0: &\qquad a = Aa^2 &&\iff A = \frac{1}{a}\,,\\
s = ia: &\qquad ia + a = -2\widetilde{B}a^2 &&\iff \widetilde{B} = -\frac{1+i}{2a}\,,\\
s = -ia: &\qquad -ia + a = -2\widetilde{C}a^2 &&\iff \widetilde{C} = -\frac{1-i}{2a}\,.
\end{aligned}$$

Demzufolge ist für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{s+a}{s(s^2+a^2)} &= \frac{1/a}{s} - \frac{1+i}{2a}\frac{1}{s-ia} - \frac{1-i}{2a}\frac{1}{s+ia}\\
&= \frac{1}{a}\mathscr{L}\{1\}(s) - \frac{1+i}{2a}\mathscr{L}\{e^{iat}\}(s) - \frac{1-i}{2a}\mathscr{L}\{e^{-iat}\}(s)\\
&= \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{a} - \frac{1+i}{2a}e^{iat} - \frac{1-i}{2a}e^{-iat}\Big\}(s)\\
&= \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{a}\big(1 - \frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat}) + \frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})\big)\Big\}(s)\\
&= \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{a}\big(1 - \cos(at) + \sin(at)\big)\Big\}(s)\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 70

Wir wollen eine Lösung von

$$\begin{aligned}
m\,u''(t) + \kappa\,u(t) &= 0 \qquad \text{für alle } t \geqslant 0\\
u(0) = 0, \quad u'(0) &= v_0
\end{aligned}$$

bestimmen. Hierbei sind $m, \kappa, v_0 > 0$ fest vorgegebene Zahlen. Wendet man die Laplacetransformation $\mathscr{L}$ auf obige Gleichung an, so ergibt sich für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$

$$m\mathscr{L}\{u''\}(s) + \kappa\mathscr{L}\{u\}(s) = 0$$

bzw. mit $\mathscr{L}\{u''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{u\}(s) - su(0) - u'(0)$ und den Anfangswerten $u(0) = 0, u'(0) = v_0$

$$m(s^2\mathscr{L}\{u\}(s) - v_0) + \kappa\mathscr{L}\{u\}(s) = 0\,.$$

Auflösen nach $\mathscr{L}\{u\}(s)$ liefert

$$\mathscr{L}\{u\}(s) = \frac{mv_0}{ms^2+\kappa} = \frac{v_0}{s^2 + \frac{\kappa}{m}}\,.$$

Ist $\omega := \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$ gesetzt, so erhalten wir

$$\mathscr{L}\{u\}(s) = \frac{v_0}{s^2+\omega^2} = \frac{v_0}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

und wegen $\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$\mathscr{L}\{u\}(s) = \frac{v_0}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{v_0}{\omega}\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\}(s)\,.$$

Damit ist die durch

$$u(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) = \sqrt{\frac{m}{\kappa}}\,v_0\,\sin\Big(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\,t\Big), \qquad t \geqslant 0,$$

gegebene Funktion u Kandidat für die Lösung des obigen Anfangswertproblems und -wie man leicht verifiziert- tatsächlich die Lösung.

Aufgabe 71

a) Aus der Vorlesung kennen wir die Identität

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n\mathscr{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

für eine exponentiell beschränkte, n-mal stetig differenzierbare Funktion f und $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$. Speziell für $n = 1, 2$ haben wir

$$\mathscr{L}\{f'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{f''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)\,. \qquad (*)$$

Da die Anfangswerte $y(3)$ und $y'(3)$ vorgegeben sind, können wir obiges Resultat nicht direkt anwenden. Deshalb bestimmen wir zunächst eine Funktion u mit $u''(t) + 4u'(t) + 3u(t) = 12$, $u(0) = 7, u'(0) = 1$. Dann gewinnen wir eine Lösung y des ursprünglichen Anfangswertproblems durch Verschieben von u, indem wir $y(t) := u(t-3)$ setzen.

Für eine Lösung u des Problems $u''(t) + 4u'(t) + 3u(t) = 12$ mit den Anfangswerten $u(0) = 7$ und $u'(0) = 1$ bedeutet $(*)$

$$\mathscr{L}\{u'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{u\}(s) - 7 \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{u''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{u\}(s) - 7s - 1\,.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{12}{s} &= \mathscr{L}\{12\}(s) = \mathscr{L}\{u'' + 4u' + 3u\}(s) = (s^2\mathscr{L}\{u\}(s) - 7s - 1) + 4(s\,\mathscr{L}\{u\}(s) - 7) + 3\,\mathscr{L}\{u\}(s)\\ &= (s^2 + 4s + 3)\mathscr{L}\{u\}(s) - 7s - 29\,,\end{aligned}$$

also

$$\mathscr{L}\{u\}(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}\left(7s + 29 + \frac{12}{s}\right) = \frac{7s^2 + 29s + 12}{s(s+1)(s+3)}\,.$$

Um eine Funktion anzugeben, deren Laplacetransformierte gleich $\frac{7s^2+29s+12}{s(s+1)(s+3)}$ ist, führen wir eine Partialbruchzerlegung durch. Hierzu machen wir den Ansatz

$$\frac{7s^2 + 29s + 12}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit s und setzen $s = 0$ ein, so folgt $A = \frac{12}{3} = 4$. Multiplikation mit $s + 1$ und Einsetzen von $s = -1$ liefert $B = \frac{-10}{-2} = 5$, und ganz analog erhält man schließlich noch $C = \frac{-12}{6} = -2$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{u\}(s) &= \frac{4}{s} + \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s+3} = \mathscr{L}\{4\}(s) + \mathscr{L}\{5e^{-t}\}(s) - \mathscr{L}\{2e^{-3t}\}(s)\\ &= \mathscr{L}\big\{4 + 5e^{-t} - 2e^{-3t}\big\}(s)\,,\end{aligned}$$

und wir haben eine Lösung u gefunden:

$$u(t) = 4 + 5e^{-t} - 2e^{-3t}\,, \qquad t \geqslant 0.$$

Somit löst $y(t) := u(t-3) = 4 + 5e^{-t+3} - 2e^{-3t+9}$, $t \geqslant 3$, das ursprüngliche Problem.

b) Wegen $y(0) = y'(0) = 0$ erhält man hier $\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s)$ und $\mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s)$ für hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$, und mit $y''(0) = 1$ ergibt sich

$$\mathscr{L}\{y'''\}(s) = s^3\mathscr{L}\{y\}(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3\mathscr{L}\{y\}(s) - 1\,.$$

Insgesamt hat man also

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-1} &= \mathscr{L}\{e^t\}(s) = \mathscr{L}\{y''' - 3y'' + 3y' - y\}(s)\\ &= (s^3\mathscr{L}\{y\}(s) - 1) - 3s^2\mathscr{L}\{y\}(s) + 3s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - \mathscr{L}\{y\}(s)\\ &= (s^3 - 3s^2 + 3s - 1)\mathscr{L}\{y\}(s) - 1 = (s-1)^3\mathscr{L}\{y\}(s) - 1\,,\end{aligned}$$

und dies führt auf

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{(s-1)^3}\Big(1 + \frac{1}{s-1}\Big) = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^4}\,.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt bekanntlich

$$\mathscr{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0),$$

und mit der Dämpfungsregel folgt

$$\frac{1}{(s-1)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\,\mathscr{L}\{t^n\}(s-1) = \frac{1}{n!}\,\mathscr{L}\{e^t t^n\}(s) \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1).$$

Hiermit bekommen wir

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{2}\,\mathscr{L}\{e^t t^2\}(s) + \frac{1}{6}\,\mathscr{L}\{e^t t^3\}(s) = \mathscr{L}\big\{e^t(t^2/2 + t^3/6)\big\}(s)\,,$$

d.h. die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = e^t(t^2/2 + t^3/6)\,, \qquad t \geqslant 0\,.$$

c) Man erhält mit $c := y'(0)$ für hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 6 \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 6s - c\,.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{6}{(s+1)^2} &= \mathscr{L}\{6te^{-t}\}(s) = \mathscr{L}\{y'' + 2y' + y\}(s)\\ &= (s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 6s - c) + 2(s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 6) + \mathscr{L}\{y\}(s)\\ &= (s^2 + 2s + 1)\mathscr{L}\{y\}(s) - 6s - c - 12\,.\end{aligned}$$

Für die Lösung y der Differentialgleichung mit $y(0) = 6$ und $y'(0) = c$ hat man also

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\}(s) &= \frac{1}{s^2+2s+1}\left(6s + c + 12 + \frac{6}{(s+1)^2}\right) = \frac{6(s+1) + c + 6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4}\\ &= \frac{6}{s+1} + \frac{c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4}\,.\end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\frac{1}{(s+1)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\,\mathscr{L}\{t^n\}(s+1) = \frac{1}{n!}\,\mathscr{L}\{e^{-t}t^n\}(s) \qquad (\mathrm{Re}(s) > -1, n \in \mathbb{N}_0)$$

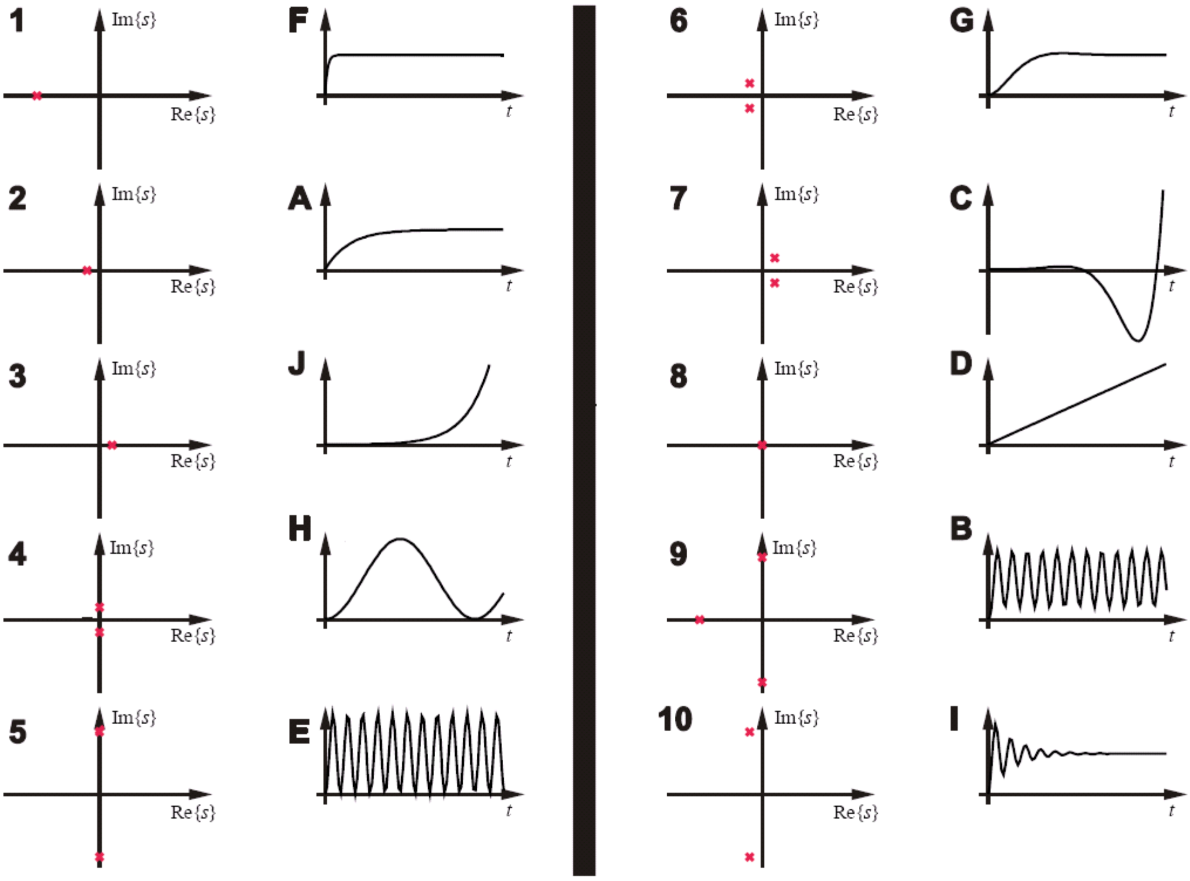
schließt man

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{6}{s+1} + \frac{c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4} = \mathscr{L}\big\{6e^{-t} + (c+6)te^{-t} + t^3e^{-t}\big\}(s)\,,$$

d.h. es ist $y(t) = (6 + (c+6)t + t^3)e^{-t}$, $t \geqslant 0$. Bei dieser Funktion gilt $y(1) = (13 + c)e^{-1}$, und für $c = 0$ wird die Bedingung $y(1) = 13/e$ erfüllt. Die Lösung des Problems ist demzufolge

$$y(t) = (6 + 6t + t^3)e^{-t}\,, \qquad t \geqslant 0\,.$$

Aufgabe 72



Folie aus der Übung zur Sprungantwort

Das Verhalten eines Systems sei beschrieben durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y &=& f(t), \quad t \geq 0, \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},\ y^{(n-2)}(0) = y_{n-2}, & \ldots & , y'(0) = y_1,\ y(0) = y_0 \end{array}\right. , \tag{S}$$

wobei $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Die *Sprungantwort* h des Systems ist die Lösung y von (S) mit $f(t) = \sigma(t)$ (Einheitssprung) sowie den Anfangswerten $y_{n-1} = y_{n-2} = \ldots = y_1 = y_0 = 0$.

Wende $\mathscr{L}$ auf (S) an [mit $f = \sigma$]. Dann gilt für hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$

$$a_n\mathscr{L}\{y^{(n)}\}(s) + a_{n-1}\mathscr{L}\{y^{(n-1)}\}(s) + \ldots + a_1\mathscr{L}\{y'\}(s) + a_0\mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{\sigma\}(s)\,. \tag{2}$$

Benutze für $k = 1, \ldots, n$

$$\mathscr{L}\{y^{(k)}\}(s) = s^k\mathscr{L}\{y\}(s) - s^{k-1}y(0) - s^{k-2}y'(0) - \ldots - y^{(k-1)}(0) = s^k\mathscr{L}\{y\}(s)\,,$$

weil $y_{n-1} = y_{n-2} = \ldots = y_1 = y_0 = 0$ sind. Hiermit folgt aus (2)

$$\big(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\big)\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s}$$

bzw. äquivalent dazu

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \underbrace{\frac{1}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}}_{=:G(s)} \cdot \frac{1}{s}\,.$$

Die Polstellen von G (also die Nullstellen von $a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$) sind im sog. *Poldiagramm* dargestellt.

Welche Aussage lässt sich bei Kenntnis der Polstellen von G über die Sprungantwort treffen?
<u>Vereinfachende Annahmen:</u> $n = 2$ und die beiden Polstellen von G seien verschieden.
Bezeichne die Polstellen von G durch λ_1, λ_2 und führe eine komplexe Partialbruchzerlegung durch.
1. Fall: G hat nur reelle Polstellen, die beide von Null verschieden sind.

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{A}{s-\lambda_1} + \frac{B}{s-\lambda_2} + \frac{C}{s} = \mathscr{L}\{Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + C\}(s)\,.$$

2. Fall: G hat nur reelle Polstellen, eine davon ist Null, etwa $\lambda_2 = 0$.

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{A}{s-\lambda_1} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} = \mathscr{L}\{Ae^{\lambda_1 t} + B + Ct\}(s)\,.$$

3. Fall: G hat eine nicht-reelle Polstelle, etwa $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Wegen $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ist dann auch $\overline{\lambda_1}$ eine Polstelle von G, und es gilt

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{A}{s-\lambda_1} + \frac{\overline{A}}{s-\overline{\lambda_1}} + \frac{C}{s} = \mathscr{L}\{Ae^{\lambda_1 t} + \overline{A}e^{\overline{\lambda_1} t} + C\}(s)\,.$$

In diesem Fall ergibt sich eine Schwingung, denn

$$\begin{aligned} Ae^{\lambda_1 t} + \overline{A}e^{\overline{\lambda_1} t} &= |A|e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)t}\left[e^{i(\arg(A)+\mathrm{Im}(\lambda_1)t)} + e^{-i(\arg(A)+\mathrm{Im}(\lambda_1)t)}\right] \\ &= \underbrace{2|A|e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)t}}_{\text{Amplitute}} \cos\big(\arg(A) + \underbrace{\mathrm{Im}(\lambda_1)}_{\text{Frequenz}}\ t\big)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 73

a) Da die gebrochenrationale Funktion $\frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s}$ •—∘ $f(t)$ die einfachen Polstellen $-2, -1, 0$ besitzt, ist $f(t)$ eine Linearkombination von e^{-2t}, e^{-t}, $e^{0t} = 1$. Hieraus folgt, dass f stückweise stetig ist und dass $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ existiert. Der Endwertsatz liefert

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0+} s\mathscr{L}\{f\}(s) = \lim_{s\to 0+} \frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

b) Nach einer Partialbruchzerlegung von $\frac{(s+2)(s+1)}{(s^2+1)s}$ •—∘ $f(t)$ sehen wir, dass $f(t)$ eine Linearkombination von e^{it}, e^{-it}, 1 (komplexe PBZ) bzw. von $\sin t$, $\cos t$, 1 (reelle PBZ) ist. Deshalb existiert $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ nicht.

c) Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung von $\frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s}$ und der inversen Laplacetransformation erkennen wir, dass die Funktion f mit $f(t)$ ∘—• $\frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s}$ stückweise stetig und exponentiell beschränkt ist. Mit dem Anfangswertsatz schließen wir

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\{f\}(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)} = \lim_{s\to\infty} \frac{1+1/s^2}{1+3/s+2/s^2} = 1\,.$$

d) Wir zeigen, dass der Grenzwert $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ nicht existiert. Würde nämlich $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ existieren, dann müsste nach dem Anfangswertsatz

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\{f\}(s) = \lim_{s\to\infty} 2\sqrt{s} < \infty$$

gelten. Dies ist ein Widerspruch! Demzufolge existiert $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ nicht.

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Sommersemester 2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 74

a) Da die Exponentialfunktion exp und $z \mapsto -z^{-4}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph sind, ist F als Verkettung holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph, also auch komplex differenzierbar. (Dort sind insbesondere die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRD) erfüllt.) Nach der Kettenregel gilt für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$F'(z) = e^{-1/z^4}(4z^{-5}) = \frac{4e^{-1/z^4}}{z^5}\,.$$

Nun zum Punkt $z_0 = 0$: Die Funktion F ist in 0 nicht einmal stetig, denn $re^{i\pi/4} \xrightarrow{r\to 0} 0$, aber

$$F(re^{i\pi/4}) = e^{-e^{-i\pi}/r^4} = e^{1/r^4} \xrightarrow{r\to 0} \infty\,.$$

Folglich ist F in $z_0 = 0$ nicht komplex differenzierbar und damit erst recht nicht holomorph.

b) Die Funktionen $u(x,y) := \sin x\, \sin y$ und $v(x,y) := -\cos x\, \cos y$ sind offensichtlich auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \cos x\, \sin y\,, & u_y(x,y) &= \sin x\, \cos y\,,\\ v_x(x,y) &= \sin x\, \cos y\,, & v_y(x,y) &= \cos x\, \sin y\,. \end{aligned}$$

Wir prüfen die CRD nach: $u_x = v_y$ ist immer erfüllt. $u_y = -v_x$ gilt genau dann, wenn $\sin x\, \cos y = 0$ ist, also wenn $x = k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ oder $y = (m + \frac{1}{2})\pi$ mit einem $m \in \mathbb{Z}$. Genau in diesen Punkten ist F komplex differenzierbar. Da die Menge

$$M := \big\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } \operatorname{Im} z = (m + \tfrac{1}{2})\pi \text{ für ein } m \in \mathbb{Z}\big\}$$

nicht offen ist, liegt nirgends Holomorphie vor. Für $z = x + iy \in M$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$F'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = \cos x\, \sin y + i\underbrace{\sin x\, \cos y}_{=0,\,\text{da } z\in M} = \cos x\, \sin y\,.$$

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $F(x+iy) = (x+iy)x = x^2 + ixy =: u(x,y) + iv(x,y)$. Die Funktionen $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar mit

$$u_x(x,y) = 2x\,, \qquad u_y(x,y) = 0\,, \qquad v_x(x,y) = y\,, \qquad v_y(x,y) = x\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned} u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad &\iff \quad 2x = x \quad \iff \quad x = 0\,,\\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \quad &\iff \quad 0 = -y \quad \iff \quad y = 0 \end{aligned}$$

sind die CRD nur für $(x,y) = (0,0)$ erfüllt. Deshalb liegt nur in $z = 0$ komplexe Differenzierbarkeit von F vor. Da $\{0\} \subset \mathbb{C}$ nicht offen ist, ist F nirgendwo holomorph.

Aufgabe 75

Wir verwenden das folgende Resultat aus der Vorlesung: Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion, die von exponentieller Ordnung γ ist. Gilt $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$, so ist F in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \gamma\}$ holomorph mit $F'(s) = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)\,dt$, d.h.

$$-tf(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F'(s)\,.$$

Deshalb ist $f(t) = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\{F'\}(t)$ für $t > 0$. Der Funktionswert von f in 0 ist irrelevant und kann beliebig definiert werden, etwa $f(0) := 0$.

a) Für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > |a|$ sei $F(s) := \ln(\frac{s+a}{s-a}) = \ln(s+a) - \ln(s-a)$. Dann ist

$$F'(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} \bullet\!\!-\!\!\circ\, e^{-at} - e^{at}\,.$$

Damit erhalten wir für $t > 0$

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\{F'\}(t) = \frac{1}{t}\left(e^{at} - e^{-at}\right) = \frac{2\sinh(at)}{t}\,.$$

b) Ist $F(s) := \ln(1 - \frac{a^2}{s^2}) = \ln((1-\frac{a}{s})(1+\frac{a}{s})) = \ln(1-\frac{a}{s}) + \ln(1+\frac{a}{s})$ für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > |a|$ gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{a}{s^2 - as} - \frac{a}{s^2 + as} = \frac{a}{s(s-a)} - \frac{a}{s(s+a)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a} \\ &= -\frac{2}{s} + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \bullet\!\!-\!\!\circ\, -2 + e^{at} + e^{-at} = -2 + 2\cosh(at)\,. \end{aligned}$$

Für $f(t) := 2\,\frac{1-\cosh(at)}{t}$, $t > 0$, und $f(0) := 0$ gilt somit $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \ln(1 - \frac{a^2}{s^2})$.

Aufgabe 76

a) Für jedes $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt

$$\gamma'(t) = -ie^{i(\pi - t)} \qquad \text{und} \qquad F(\gamma(t)) = \overline{e^{i(\pi-t)}}\left(e^{i(\pi-t)}\right)^2 = e^{-i(\pi-t)}e^{2i(\pi-t)} = e^{i(\pi-t)}\,.$$

Damit ergibt sich nach Definition des (komplexen) Kurvenintegrals

$$\begin{aligned} \int_\gamma F(z)\,dz &= \int_0^{\pi/2} F(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} e^{i(\pi-t)}(-ie^{i(\pi-t)})\,dt \\ &= -ie^{2\pi i}\int_0^{\pi/2} e^{-2it}\,dt = -i\left[\frac{e^{-2it}}{-2i}\right]_{t=0}^{\pi/2} = \frac{e^{-i\pi} - e^0}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1\,. \end{aligned}$$

b) Die Kurve γ durchläuft den positiv orientierten Rand des Quadrates mit den Eckpunkten 0, 1, $1+i$ und i, setzt sich also zusammen aus den vier Teilkurven

$$\gamma_1(t) = t\,, \qquad \gamma_2(t) = 1 + it\,, \qquad \gamma_3(t) = 1 - t + i\,, \qquad \gamma_4(t) = i(1-t)\,,$$

wobei jeweils $t \in [0,1]$ gilt. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \int_\gamma F(z)\,dz &= \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} F(z)\,dz = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 F(\gamma_k(t))\gamma_k'(t)\,dt = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 |\gamma_k(t)|^2\gamma_k'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 (1+t^2)i\,dt + \int_0^1 \big((1-t)^2 + 1\big)(-1)\,dt + \int_0^1 (1-t)^2(-i)\,dt \\ &= \int_0^1 \Big(t^2 - (1-t)^2 - 1 + i\big(1 + t^2 - (1-t)^2\big)\Big)\,dt = \int_0^1 (2t - 2 + 2it)\,dt = -1 + i\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 77

a) Wir verwenden bei diesem Integranden die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}\,.$$

Da die Punkte $-i$ und i im Inneren der Kreislinie $|z| = 2$ liegen und die Funktion $z \mapsto iz^3/2$ im konvexen Gebiet $G = \mathbb{C}$ holomorph ist, ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz &= \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-(-i)}\,dz - \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-i}\,dz \\ &= 2\pi i\,\frac{iz^3}{2}\Big|_{z=-i} - 2\pi i\,\frac{iz^3}{2}\Big|_{z=i} = -\pi(-i)^3 + \pi i^3 = -2\pi i\,.\end{aligned}$$

b) Der Integrand lässt sich hier wie folgt umschreiben

$$\frac{e^z}{z^2+2z} = \frac{e^z}{z(z+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z+2}\Big)\,.$$

Der Punkt 0 liegt im Inneren des Integrationsweges, der Punkt -2 dagegen im Äußeren. Folglich liefern die Cauchysche Integralformel und der Cauchysche Integralsatz

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz = \frac{1}{2}\Big(\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz - \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z+2}\,dz\Big) = \frac{1}{2}\Big(2\pi i\, e^z\big|_{z=0} - 0\Big) = \pi i\,.$$

Alternativ: Die Funktion $F(z) := \frac{e^z}{z+2}$ ist holomorph in einer Umgebung des Gebietes, das von der Kreisline $|z| = 1$ umlaufen wird. Wir können somit direkt die Cauchysche Integralformel anwenden und erhalten

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z+2)}\,dz = \int_{|z|=1} \frac{F(z)}{z-0}\,dz = 2\pi i F(0) = \pi i\,.$$

c) Für die durch $F(z) := ze^{iz}$ definierte, in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion gilt

$$F'(z) = e^{iz} + z(ie^{iz}) = (1+iz)e^{iz}\,, \qquad F''(z) = ie^{iz} + (1+iz)(ie^{iz}) = (2i - z)e^{iz}\,,$$

und wegen $|\pi| < 4$ erhalten wir mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen

$$\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz = 2\pi i\,\frac{F''(\pi)}{2!} = \pi i\,(2i - z)e^{iz}\big|_{z=\pi} = \pi i\,(2i-\pi)(-1) = 2\pi + i\pi^2\,.$$

d) Die Nullstelle $z_0 = 7$ des Nenners des Integranden liegt außerhalb der Kreislinie $|z - 2| = 3$, denn $|7 - 2| = 5 > 3$. Der Integrand ist also holomorph in dem konvexen und damit einfach zusammenhängenden Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 4\}$, in welchem auch der einfach geschlossene, positiv orientierte Integrationsweg verläuft. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt somit

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{42}}\,dz = 0\,.$$

Aufgabe 78

Vorüberlegung: Will man

$$\frac{1}{z-a}$$

um den Punkt $z_0 \neq a$ in eine Laurentreihe entwickeln, so gibt es dafür zwei Möglichkeiten. Für $|z-z_0| < |a-z_0|$ hat man die Potenzreihenentwicklung

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0)+(z_0-a)} = \frac{1}{z_0-a} \cdot \frac{1}{\frac{z-z_0}{z_0-a}+1} = \frac{1}{z_0-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{a-z_0}} \\ &= \frac{1}{z_0-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{a-z_0}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(a-z_0)^{k+1}}\,.\end{aligned} \tag{$*$}$$

Für $|z-z_0| > |a-z_0|$ dagegen ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0)+(z_0-a)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1+\frac{z_0-a}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{a-z_0}{z-z_0}} \\ &= \frac{1}{z-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a-z_0}{z-z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\,.\end{aligned} \tag{$**$}$$

a) Für $1 < |z| < 3$ gilt

$$\begin{aligned}F(z) &= \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z^{-2}-1} - \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-z^{-2}} - \frac{1}{z-3} \\ &= -\frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-2})^k - \frac{1}{z-3} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+2}} - \frac{1}{z-3} \overset{(*)}{=} -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2(k+1)}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}}\,.\end{aligned}$$

b) Die Partialbruchzerlegung des ersten Summanden von $F(z)$ liefert die Darstellung

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1}\right) - \frac{1}{z-3}\,.$$

Die Funktion F hat Polstellen in -1, in 1 und in 3. Da die beiden Punkte -1 und 3 von $z_0 = 1$ den Abstand 2 haben, kommen als Gebiete für die Laurententwicklung um $z_0 = 1$ nur die beiden Kreisringe

$$0 < |z-1| < 2 \qquad \text{und} \qquad 2 < |z-1| < \infty$$

in Frage. Da der Punkt $1+3i$ im Konvergenzgebiet liegen soll und von z_0 den Abstand $|1+3i-1| = 3$ hat, ist der zweite Kreisring der richtige. Dort gilt gemäß $(**)$

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1-1)^k}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(z-1)^{k+1}}\,, \qquad \frac{1}{z-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3-1)^k}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}}\,.$$

Also ergibt sich für $|z-1| > 2$

$$F(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(z-1)^{k+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-2)^k - 2^k}{(z-1)^{k+1}}\,.$$

Aufgabe 79

a) Die Funktion

$$F(z) = \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$$

hat in $z_0 = 1$ eine Polstelle zweiter Ordnung. Deshalb lässt sich das Residuum von F in $z_0 = 1$ bestimmen durch

$$\operatorname{res}(F;1) = \left(\frac{d}{dz}\Big((z-1)^2 F(z)\Big)\right)\bigg|_{z=1} = \left(\frac{d}{dz}\Big((z+1)^2\Big)\right)\bigg|_{z=1} = \Big(2(z+1)\Big)\bigg|_{z=1} = 4\,.$$

Alternativ: Wir können auch die Laurententwicklung von F um $z_0 = 1$ berechnen

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \frac{z^2+2z+1}{(z-1)^2} = \frac{z^2-2z+1}{(z-1)^2} + \frac{4z}{(z-1)^2} \\ &= 1 + \frac{4(z-1+1)}{(z-1)^2} = 1 + \frac{4}{z-1} + \frac{4}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

und hieran $\operatorname{res}(F;1) = 4$ ablesen.

b) Die Funktion

$$F(z) = \frac{ze^{az}}{(z-1)^2} \qquad (a \in \mathbb{C} \text{ fest})$$

besitzt in $z_0 = 1$ einen Pol zweiter Ordnung. Für das Residuum von F in 1 ergibt sich

$$\operatorname{res}(F;1) = \left(\frac{d}{dz}\Big((z-1)^2 F(z)\Big)\right)\bigg|_{z=1} = \left(\frac{d}{dz}\Big(ze^{az}\Big)\right)\bigg|_{z=1} = \Big(e^{az} + zae^{az}\Big)\bigg|_{z=1} = (1+a)e^a\,.$$

c) Die Funktion $F(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$ hat in $z_0 = 1$ einen Pol der Ordnung 4. Daher ist

$$\operatorname{res}(F;1) = \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3}{dz^3}\Big((z-1)^4 F(z)\Big)\right)\bigg|_{z=1} = \frac{1}{6}\left(\frac{d^3}{dz^3}\, e^z\right)\bigg|_{z=1} = \frac{1}{6}\, e^z\bigg|_{z=1} = \frac{e}{6}\,.$$

d) Da F in $z_0 = 1$ eine wesentliche Singularität besitzt, können wir nicht wie zuvor vorgehen. Wir bestimmen stattdessen die zugehörige Laurentreihe um 1 und lesen das Residuum ab

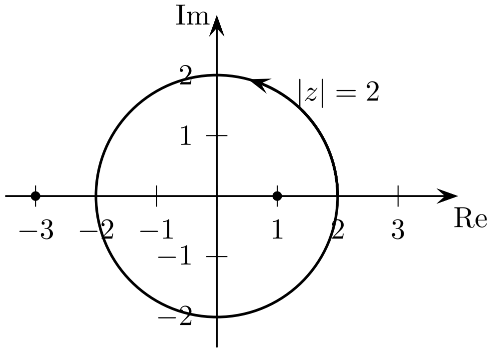
$$\begin{aligned} F(z) = ze^{\frac{1}{1-z}} &= z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^n = ((z-1)+1)\sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}(z-1)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}(z-1)^{k+1} + \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}(z-1)^k \\ &= \sum_{l=-\infty}^{1} \frac{(-1)^{l-1}}{(-(l-1))!}(z-1)^l + \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}(z-1)^k \\ &= (z-1) + \sum_{k=-\infty}^{0}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{(-(k-1))!} + \frac{(-1)^k}{(-k)!}\right)(z-1)^k\,, \qquad z \neq 1\,. \end{aligned}$$

Das Residuum von F in 1 ist der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$, also

$$\operatorname{res}(F;1) = \frac{(-1)^{-2}}{2!} + \frac{-1}{1!} = -\frac{1}{2}\,.$$

Aufgabe 80

a) Der Integrand $F(z) := \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt in 1 eine einfache und in -3 eine doppelte Polstelle und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -3\}$.



Da innerhalb des Integrationsweges $|z| = 2$ nur die Polstelle 1 liegt, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;1) = \frac{\mathrm{e}\,\pi i}{8}\,,$$

denn für das Residuum von F in 1 gilt

$$\operatorname{res}(F;1) = (z-1)F(z)\Big|_{z=1} = \frac{e^z}{(z+3)^2}\Big|_{z=1} = \frac{e}{16}\,.$$

b) Nun liegen die beiden Polstellen -3 und 1 innerhalb des Integrationsweges $|z| = 9$. Deswegen gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=9} F(z)\,dz = 2\pi i\Big(\operatorname{res}(F;1) + \operatorname{res}(F;-3)\Big) = 2\pi i\Big(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\Big) = \frac{(e-5e^{-3})\pi i}{8}\,,$$

da

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(F;-3) &= \left(\frac{d}{dz}\,(z+3)^2F(z)\right)\Big|_{z=-3} = \left(\frac{d}{dz}\,\frac{e^z}{z-1}\right)\Big|_{z=-3} = \left(\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}\right)\Big|_{z=-3}\\ &= \frac{-5e^{-3}}{16}\,.\end{aligned}$$

c) Schreibe $F(z) := \frac{z}{e^{iz}-1}$. Der Nenner von $F(z)$ wird genau dann 0, wenn $z = 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Von diesen Punkten liegt nur $z = 0$ im Inneren des Kreises $|z| = 1$. Daher ist

$$\int_{|z|=1} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;0)\,.$$

Nun sieht man z.B. anhand der Darstellung

$$F(z) = \frac{z}{e^{iz}-1} = \frac{z}{\big(1+iz+\frac{1}{2}(iz)^2+\cdots\big)-1} = \frac{z}{iz-\frac{1}{2}z^2+\cdots} = \frac{1}{i-\frac{1}{2}z+\cdots}\,,$$

dass in $z = 0$ eine hebbare Singularität vorliegt. Deshalb gilt $\operatorname{res}(F;0) = 0$, so dass das Integral $\int_{|z|=1} F(z)\,dz$ den Wert 0 hat.

d) Sei $F(z) := e^{\frac{z}{1-z}}$. Hier liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;1)\,.$$

Um das Residuum $\operatorname{res}(F;1)$ zu berechnen, betrachten wir die Laurententwicklung von F um 1

$$F(z) = \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) = \exp\left(-1 + \frac{1}{1-z}\right) = e^{-1}e^{-1/(z-1)} = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^{-k}\,;$$

der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ lautet $-e^{-1}$. Also ist $\operatorname{res}(F;1) = -e^{-1}$ und damit

$$\int_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) dz = -\frac{2\pi i}{e}\,.$$

e) Der Integrand $F(z) := \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)}$ besitzt in 1, -2 und $-i$ jeweils einen Pol erster Ordnung und ist holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{1,-2,-i\}$. Da sich alle Polstellen im Inneren von G befinden, ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\int_{\partial G} F(z)\, dz = 2\pi i \Big(\operatorname{res}(F;1) + \operatorname{res}(F;-2) + \operatorname{res}(F;-i)\Big)\,.$$

Wir berechnen nun die Residuen von F in den (einfachen) Polstellen

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(F;1) &= (z-1)F(z)\Big|_{z=1} = \frac{2z}{(z+2)(z+i)}\Big|_{z=1} = \frac{2}{3(1+i)} = \frac{1}{3}(1-i)\,,\\
\operatorname{res}(F;-2) &= (z+2)F(z)\Big|_{z=-2} = \frac{2z}{(z-1)(z+i)}\Big|_{z=-2} = \frac{4}{3(-2+i)} = -\frac{4}{15}(2+i)\,,\\
\operatorname{res}(F;-i) &= (z+i)F(z)\Big|_{z=-i} = \frac{2z}{(z-1)(z+2)}\Big|_{z=-i} = \frac{2i}{(i+1)(-i+2)} = \frac{1}{5}(1+3i)\,.
\end{aligned}$$

Hiermit ist

$$\int_{\partial G} F(z)\, dz = 2\pi i\Big(\frac{1}{3}(1-i) - \frac{4}{15}(2+i) + \frac{1}{5}(1+3i)\Big) = 0\,.$$

Aufgabe 81

Als Hintereinanderausführung holomorpher Funktionen ist die Funktion F auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Sie lässt sich also um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\, z^n\,.$$

Diese Potenzreihe konvergiert auf der größten Kreisscheibe um $z_0 = 0$, auf der F holomorph ist. Hier konvergiert die Potenzreihe also für jedes $z \in \mathbb{C}$.
Der Integrand $\zeta F(1/\zeta)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und für $\zeta \neq 0$, insbesondere also für $0 < |\zeta| < 1$, gilt nach den obigen Überlegungen

$$\zeta F(1/\zeta) = \zeta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\,\zeta^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\,\zeta^{1-n}\,.$$

Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\int_{|\zeta|=1/2}\zeta e^{\sin(1/\zeta)}\, d\zeta = \int_{|z|=1/2}\zeta F(1/\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{res}(\zeta \mapsto \zeta F(1/\zeta);0)\,,$$

und Ablesen an der Laurentreihe für $\zeta F(1/\zeta)$ ergibt

$$= 2\pi i\,\frac{F''(0)}{2!}\,.$$

Wegen $F'(z) = \cos(z)F(z)$, $F''(z) = -\sin(z)F(z) + \cos^2(z)F(z)$ und $F(0) = 1$ ist $F''(0) = 1$. Das Integral ist also gleich

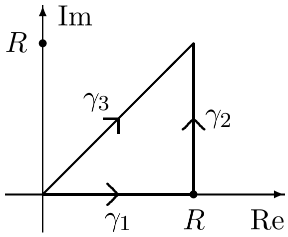
$$2\pi i\,\frac{1}{2} = \pi i\,.$$

Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2012
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 82



a) Im konvexen Gebiet $\mathbb{C}$ ist $F(z) := e^{-z^2}$ holomorph, und durch Aneinanderhängen von γ_1, γ_2 und $-\gamma_3$ erhält man eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve γ. Führen wir die Schreibweise $I(\Gamma) := \int_\Gamma F(z)\,dz$ ein, so liefert der Cauchysche Integralsatz

$$0 = I(\gamma) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) + I(-\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) - I(\gamma_3)\,.$$

Damit ergibt sich $I(\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2)$, also die behauptete Gleichung.

b) Es gilt $\gamma_2^2(t) = (R+it)^2 = R^2 + 2iRt - t^2$ und $\gamma_2'(t) = i$. Damit erhalten wir

$$|I(\gamma_2)| = \left|\int_0^R e^{-\gamma_2^2(t)}\gamma_2'(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^R \left|e^{-R^2-2iRt+t^2}i\right|dt = \int_0^R e^{t^2-R^2}\,dt\,.$$

Wegen der für alle $t \in [0,R]$ gültigen Abschätzung $t^2 \leqslant Rt$ bekommen wir folglich

$$|I(\gamma_2)| \leqslant \int_0^R e^{Rt-R^2}\,dt = \left[\frac{e^{Rt-R^2}}{R}\right]_{t=0}^R = \frac{1-e^{-R^2}}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0\,,$$

und damit ist $I(\gamma_2) \to 0$ für $R \to \infty$ bewiesen.

Bemerkung: Die Standardabschätzung $|\int_{\gamma_2} F(z)\,dz| \leqslant L(\gamma_2)\max\{|F(z)| : z \in \gamma_2([0,R])\}$ hätte hier nicht ausgereicht, denn es gilt $L(\gamma_2) = R$ und $\max\{|F(z)| : z \in \gamma_2([0,R])\} = 1$.

c) Wir betrachten nun noch $I(\gamma_1)$ und $I(\gamma_3)$. Für das erste Kurvenintegral erhalten wir

$$I(\gamma_1) = \int_0^R e^{-\gamma_1^2(t)}\gamma_1'(t)\,dt = \int_0^R e^{-t^2}\,dt \xrightarrow{R\to\infty} \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

und wegen $\gamma_3^2(t) = t^2(1+i)^2 = 2it^2$ und $\gamma_3'(t) = 1+i$ gilt

$$I(\gamma_3) = \int_0^R e^{-\gamma_3^2(t)}\gamma_3'(t)\,dt = \int_0^R e^{-2it^2}(1+i)\,dt \xrightarrow{R\to\infty} (1+i)\int_0^\infty e^{-2it^2}\,dt\,.$$

(Dieses uneigentliche Integral muss wegen der Konvergenz von $I(\gamma_1)$ und $I(\gamma_2)$ sowie der in **a)** bewiesenen Gleichung existieren.) Mit der Substitution $x = \sqrt{2}\,t$ ergibt sich

$$I(\gamma_3) \xrightarrow{R\to\infty} (1+i)\int_0^\infty e^{-ix^2}\frac{dx}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \left[\cos(x^2) - i\sin(x^2)\right]dx\,.$$

Beim Grenzübergang $R \to \infty$ folgt also mit **b)** aus der in **a)** bewiesenen Gleichung

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \left[\cos(x^2) - i \sin(x^2)\right] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 \,.$$

Für die beiden Integrale $C := \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ und $S := \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ hat man somit

$$(1+i)(C - iS) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,, \qquad \text{d.h.} \qquad (C+S) + i(C-S) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,.$$

Hieraus folgen die Gleichungen $C + S = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ und $C - S = 0$, also ist $C = S = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$.

Aufgabe 83

Es sei

$$F(s) := \frac{1}{(s+1)(s-2)^2}$$

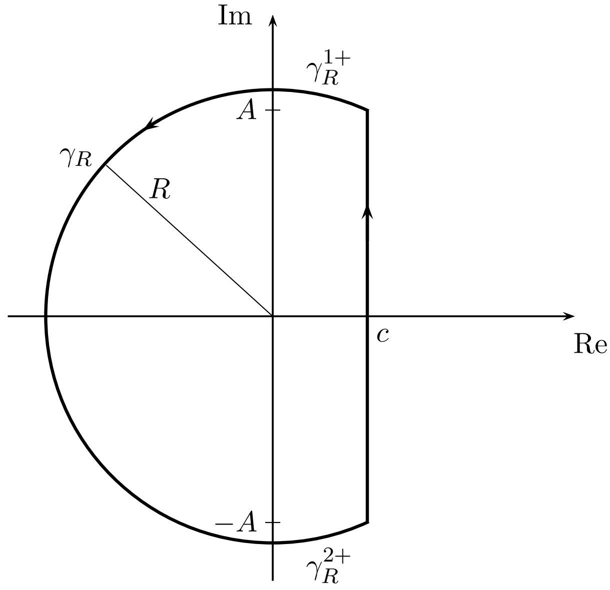
für $\mathrm{Re}(s) > 2$. Die Funktion $\widetilde{F} \colon \mathbb{C} \setminus \{-1, 2\} \to \mathbb{C}$, $s \mapsto \frac{1}{(s+1)(s-2)^2}$, ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{-1, 2\}$ und besitzt in $a_1 := -1$ eine einfache und in $a_2 := 2$ eine doppelte Polstelle. Außerdem stimmen $F(s)$ und $\widetilde{F}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 2$ überein.
Seien $c > 2$ und $t > 0$. Wir wollen den Wert von

$$\lim_{A \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iA}^{c+iA} e^{st} F(s)\,ds = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iA}^{c+iA} e^{st} \widetilde{F}(s)\,ds$$

bestimmen. Um das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iA}^{c+iA} e^{st} \widetilde{F}(s)\,ds$$

zu berechnen, betrachten wir die einfach geschlossene und positiv orientierte Integrationskurve



(hierbei ist nach Pythagoras $R^2 = c^2 + A^2$; γ_R bezeichne den (gesamten) Kreisbogen, während γ_R^{1+} bzw. γ_R^{2+} nur diejenigen Teile des Kreisbogens γ_R seien, die sich 1. bzw. 4. Quadranten befinden) und wenden den Residuensatz an

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iA}^{c+iA} e^{st} \widetilde{F}(s)\,ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} e^{st} \widetilde{F}(s)\,ds = \sum_{j=1}^{2} \mathrm{res}(s \mapsto e^{st} \widetilde{F}(s); a_j)\,.$$

Wir zeigen jetzt

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} e^{st} \widetilde{F}(s)\,ds = 0\,.$$

Dazu weisen wir die Voraussetzungen des Jordanschen Lemmas nach. Zum einen ist $\widetilde{F}$ auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ holomorph, zum anderen gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R > 2$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung (diese lautet: $|a+b| \geqslant ||a| - |b||$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$)

$$|\widetilde{F}(z)| = \frac{1}{|z+1|\,|z-2|^2} \leqslant \frac{1}{(|z|-1)\,(|z|-2)^2} = \frac{1}{(R-1)\,(R-2)^2} =: C(R) \longrightarrow 0 \quad (R \to \infty)\,.$$

Das Jordansche Lemma liefert

$$\int_{\gamma_R^-} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds \longrightarrow 0 \quad (R \to \infty)\,,$$

wobei $\gamma_R^-(\varphi) := Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (γ_R^- ist also der Teil des Kreisbogens γ_R mit Realteil $\leqslant 0$).
Es verbleibt zu begründen, dass die Kurvenintegrale $\int_{\gamma_R^{1+}} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds$ und $\int_{\gamma_R^{2+}} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds$ für $R \to \infty$ ebenfalls gegen 0 konvergieren. Fixiere dazu $j \in \{1, 2\}$. Wegen $|\widetilde{F}(z)| \leqslant C(R)$ für $|z| = R$ ist

$$\left|\int_{\gamma_R^{j+}} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds\right| \leqslant \int_{\gamma_R^{j+}} e^{\mathrm{Re}(s)t}|\widetilde{F}(s)|\,|ds| \leqslant e^{ct}C(R)\,L(\gamma_R^{j+})\,.$$

Da die Länge $L(\gamma_R^{j+})$ der Kurve γ_R^{j+} beschränkt ist (mit einer Schranke, die allein von c abhängt) und $C(R) \to 0$ für $R \to \infty$ gilt, folgt $\int_{\gamma_R^{j+}} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds \to 0$ für $R \to \infty$.
Für $A \to \infty$ (und damit auch $R \to \infty$) haben wir also

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iA}^{c+iA} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds = \sum_{j=1}^{2} \mathrm{res}(s \mapsto e^{st}\widetilde{F}(s); a_j)\,.$$

Mit

$$\mathrm{res}(s \mapsto e^{st}\widetilde{F}(s); -1) = (s+1)e^{st}\widetilde{F}(s)\Big|_{s=-1} = \frac{e^{st}}{(s-2)^2}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{9}\,e^{-t}$$

und

$$\mathrm{res}(s \mapsto e^{st}\widetilde{F}(s); 2) = \frac{d}{ds}\,\frac{e^{st}}{s+1}\Big|_{s=2} = \frac{te^{st}(s+1) - e^{st}}{(s+1)^2}\Big|_{s=2} = \frac{1}{9}\big(3te^{2t} - e^{2t}\big)$$

erhalten wir schließlich

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\}(t) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iA}^{c+iA} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds = \frac{1}{9}\big(e^{-t} + 3te^{2t} - e^{2t}\big)\,,$$

d.h. für $f(t) := \frac{1}{9}\big(e^{-t} + 3te^{2t} - e^{2t}\big)$, $t > 0$, gilt

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\,, \qquad \mathrm{Re}(s) > 2\,.$$

Aufgabe 84

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t < 0 \\ 2\cos(t) & \text{für } t \geqslant 0 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

a) **i)** Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0\,, \\ -2\sin(t) & \text{für } t > 0\,. \end{cases}$$

ii) Da f' beschränkt ist, ist f' von exponentieller Ordnung 0. Somit gilt für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}\{f'\}(s) = \mathscr{L}\{-2\sin(t)\}(s) = \frac{-2}{s^2+1}\,.$$

Die Formel aus Abschnitt 8.12 führt auf dasselbe Ergebnis

$$\mathscr{L}\{f'\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0+) = s\,\frac{2s}{s^2+1} - 2 = \frac{-2}{s^2+1}\,.$$

b) Nun betrachten wir die Distribution T_f, d.h. die lineare Abbildung $T_f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt + 2\int_0^{\infty} \cos(t)\varphi(t)\,dt\,, \qquad \varphi \in \mathscr{D}.$$

i) Gemäß Definition gilt für jedes $\varphi \in \mathscr{D}$

$$DT_f(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} \varphi'(t)\,dt - 2\int_0^{\infty} \cos(t)\varphi'(t)\,dt\,.$$

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} DT_f(\varphi) &= -\lim_{a\to-\infty}\big[\varphi(t)\big]_{t=a}^{0} - 2\lim_{b\to\infty}\left(\big[\cos(t)\varphi(t)\big]_{t=0}^{b} - \int_0^{b} -\sin(t)\varphi(t)\,dt\right) \\ &= -\varphi(0) + 2\varphi(0) - 2\int_0^{\infty} \sin(t)\varphi(t)\,dt \\ &= \varphi(0) - 2T_{\sin_+}(\varphi) = (\delta_0 - 2T_{\sin_+})(\varphi)\,, \end{aligned}$$

wobei $\sin_+(t) := \sigma(t)\sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$, gesetzt ist.
Alternativ kann man die Formel aus Abschnitt 10.3 verwenden

$$DT_f = T_{f'} + \big(f(0+) - f(0-)\big)\delta_0 = T_{f'} + (2-1)\delta_0 = -2T_{\sin_+} + \delta_0\,.$$

(Hierbei ist f' im Sinne von 8.12 zu verstehen.)

ii) Wegen

$$f_+(t) := \sigma(t)f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 2\cos(t) & \text{für } t \geqslant 0 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

ist die Distribution T_{f_+} gegeben durch

$$T_{f_+}(\varphi) = 2\int_0^{\infty} \cos(t)\varphi(t)\,dt\,, \qquad \varphi \in \mathscr{D}\,.$$

Für die distributionelle Ableitung von T_{f_+} ergibt sich

$$D(T_{f_+}) = T_{(f_+)'} + (f(0+) - 0)\delta_0 = -2T_{\sin_+} + 2\delta_0\,.$$

(Erneut ist $(f_+)'$ im Sinne von 8.12 zu verstehen.) Also gilt für jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}$

$$D(T_{f_+})(\varphi) = -2\int_0^{\infty} \sin(t)\varphi(t)\,dt + 2\varphi(0)\,.$$

iii) Da sowohl $T_{\sin_+}$ als auch δ_0 von exponentieller Ordnung 0 mit positivem Träger sind (vgl. Beispiele 10.4 (1) bzw. (2)), gilt dies auch für $D(T_{f_+}) = -2T_{\sin_+} + 2\delta_0$. Daher ist $\mathscr{L}\{D(T_{f_+})\}(s)$ für alle $\mathrm{Re}(s) > 0$ definiert mit

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{D(T_{f_+})\}(s) &= -2\mathscr{L}\{T_{\sin_+}\}(s) + 2\mathscr{L}\{\delta_0\}(s) = -2T_{\sin_+}(t \mapsto e^{-st}) + 2\delta_0(t \mapsto e^{-st}) \\ &= -2\int_0^{\infty} e^{-st}\sin(t)\,dt + 2e^{-s\cdot 0} = -2\mathscr{L}\{\sin(t)\}(s) + 2 = \frac{-2}{s^2+1} + 2 \\ &= \frac{2s^2}{s^2+1}\,. \end{aligned}$$

Die Ableitungsregel für die Laplacetransformation von Distributionen liefert für $\mathrm{Re}\, s > 0$

$$\mathscr{L}\{D(T_{f_+})\}(s) = s\mathscr{L}\{T_{f_+}\}(s) = s\mathscr{L}\{2\cos(t)\}(s) = s\,\frac{2s}{s^2+1} = \frac{2s^2}{s^2+1}\,.$$

iv) Die verallgemeinerte Ableitung $\dot{f}$ von f ist gegeben durch die Distribution

$$\dot{f} = D(T_{f_+}) - f(0-)\delta_0 \overset{\textbf{ii)}}{=} \big(-2T_{\sin_+} + 2\delta_0\big) - 1\cdot\delta_0 = -2T_{\sin_+} + \delta_0\,.$$

Ferner gilt

$$\mathscr{L}\{\dot{f}\} = \mathscr{L}\{D(T_{f_+})\}(s) - f(0-)\,\mathscr{L}\{\delta_0\}(s) \overset{\textbf{iii)}}{=} \frac{2s^2}{s^2+1} - 1 = \frac{s^2-1}{s^2+1}\,.$$

Aufgabe 85

Seien

$$g(t) := \begin{cases} t-1 & \text{für } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{für } t < 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad h(t) := \sigma(t-1) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{für } t < 1 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

a) Um $DT_g = T_h$ nachzurechnen, muss man $DT_g(\varphi) = T_h(\varphi)$ für jedes $\varphi \in \mathscr{D}$ zeigen. Ist $\varphi \in \mathscr{D}$, so gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = 0$ für alle $t \geqslant b$. Nach Definition der Ableitung von Distributionen gilt

$$\begin{aligned} DT_g(\varphi) = T_g(-\varphi') &= -\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_1^{\infty} (t-1)\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int_1^b (t-1)\varphi'(t)\,dt \overset{\text{part. Int.}}{=} -\left(\big[(t-1)\varphi(t)\big]_1^b - \int_1^b \varphi(t)\,dt \right) \\ &= \int_1^b \varphi(t)\,dt = \int_1^{\infty} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\varphi(t)\,dt = T_h(\varphi)\,. \end{aligned}$$

b) Hier muss man $D(DT_g)(\varphi) = \delta_1(\varphi)$ für jedes $\varphi \in \mathscr{D}$ nachrechnen. Ist $\varphi \in \mathscr{D}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = 0$ für alle $t \geqslant b$, so gilt

$$\begin{aligned} D(DT_g)(\varphi) &\overset{\textbf{a)}}{=} D(T_h)(\varphi) = T_h(-\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int_1^{\infty} \varphi'(t)\,dt = -\int_1^b \varphi'(t)\,dt = -\big[\varphi(t)\big]_1^b = -\big(\varphi(b) - \varphi(1)\big) \\ &= \varphi(1) = \delta_1(\varphi)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 86

a) Da die Impulsantwort g die distributionelle Ableitung der Sprungantwort T_h mit $h(t) = \frac{L}{R}\,\sigma(t)(1-e^{-\frac{R}{L}t})$, $t \in \mathbb{R}$, ist, erhalten wir für die Impulsantwort des Systems $g = T_{t \mapsto \sigma(t)e^{-\frac{R}{L}t}}$.

b) Wegen $G(s) = 3\,\frac{2}{s^2+2^2} = \mathscr{L}\{3\sin(2t)\}(s)$ ist $g(t) = 3\,\sigma(t)\sin(2t)$, $t \in \mathbb{R}$, die Impulsantwort des Systems.

c) Ein System mit Input u und Output y sei durch die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 3y = u' + u$$

gegeben. Die Impulsantwort g des Systems ist der Output des Systems, wenn man als Input $u = \delta_0$ anlegt. Nach 10.6 erhalten wir für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$

$$\big(s^2+4s+3\big)\mathscr{L}\{g\}(s) = (s+1)\mathscr{L}\{\delta_0\}(s) = s+1\,.$$

Damit ergibt sich für die Übertragungsfunktion des Systems

$$G(s) := \mathscr{L}\{g\}(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+3} = \frac{s+1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+3}\,,$$

so dass $g(t) = \sigma(t)e^{-3t}$, $t \in \mathbb{R}$, die Impulsantwort des Systems ist.

Die Sprungantwort h genügt der Gleichung

$$\big(s^2+4s+3\big)\mathscr{L}\{h\}(s) = (s+1)\mathscr{L}\{\sigma\}(s)$$

bzw.

$$\mathscr{L}\{h\}(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+3}\,\mathscr{L}\{\sigma\}(s) = G(s)\cdot\frac{1}{s}\,.$$

Wegen

$$G(s)\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s+3}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1/3}{s} - \frac{1/3}{s+3} = \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{3}(1-e^{-3t})\Big\}(s)$$

lautet die Sprungantwort des Systems: $h(t) = \frac{1}{3}\sigma(t)(1-e^{-3t})$, $t \in \mathbb{R}$.