Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
23.04.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

2. Übungsblatt

Aufgabe 5

(a) Geben Sie jeweils eine Matrix A an, welche die folgenden Operationen beschreibt:

(i) eine Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an der (x_1, x_2)-Ebene ($A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$).

(ii) eine Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $x_1 = x_2$ ($A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$).

(iii) eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung 0 um den Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$.

(b) Es seien $\alpha \in \mathbb{C}$ und $j, k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant j, k \leqslant n, k \neq j$ gegeben. Finden Sie eine Matrix $Z \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ mit folgender Eigenschaft: für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,p)}$ bewirkt die Matrixmultiplikation ZA, dass zu der j-ten Zeile von A das α-fache der k-ten Zeile von A addiert wird.

Aufgabe 6

Es sei V, W Vektorräume und $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Ferner sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V.

(a) Zeigen Sie: f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine Basis von V ist.

(b) Betrachten Sie die Koordinatenabbildung $\phi : V \to \mathbb{C}^n$

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

und beweisen Sie, dass ϕ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 7

a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die folgenden Vektoren aus $\mathbb{C}^3$ an:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Seien $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$

Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ an.

— bitte wenden —

Aufgabe 8

a) Zeigen Sie, dass die durch $f(x) := 2$, $g(x) := x - 1$ und $h(x) := x^2 + 3x$ definierten Funktionen f, g und h aus $C^0([0,1])$ linear unabhängig sind.

b) Sei $P_2([0,1]) := \{p\colon [0,1] \to \mathbb{C} \mid p \text{ ist Polynom vom Grad } \leqslant 2\}$. Begründen Sie, dass (f, g, h) eine Basis von $P_2([0,1])$ bildet.

c) Wie lauten die Koordinaten des durch $p(x) = 8x^2 + 2x + 2$, $x \in [0,1]$, gegebenen Polynoms p bzgl. der Basis (f, g, h)?

Achtung:

Beachten Sie bitte die Hinweise auf der Seite

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etec2013s/.

Hinweis Die Löungen zum Übungsblatt werden in den Tutorien besprochen.