Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
1.05.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

3. Übungsblatt

Aufgabe 9

(a) Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \lambda_k a_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \lambda_k \right) a_j = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \lambda_k = 0 \quad (j = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

da die a_j l. u. sind. Schreiben wir $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, so haben wir

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k = 0 \Leftrightarrow A\vec{\lambda} = 0 \quad (*)$$

Um die Aussage zu zeigen, beweisen wir:

(i) A regulär $\Rightarrow b_1, \dots, b_n$ linear unabhängig.

(ii) A nicht regulär $\Rightarrow b_1, \dots, b_n$ linear abhängig.

Dazu:

(i) Sind nun Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gegeben, mit denen $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k = 0$ gilt und ist A regulär, so folgt $\vec{\lambda} = 0$. Also $\lambda_k = 0$ für alle k und die b_k sind linear unabhängig.

(ii) Ist A nicht regulär, so ist $\mathrm{Kern} A \neq \{\vec{0}\}$ und es gibt daher einen Vektor $\vec{\mu} \neq 0$ mit $A\vec{\mu} = 0$. Wegen $(*)$ gilt mit den Komponenten $\mu_1, \dots, \mu_n$ des Vektors $\vec{\mu}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k = 0.$$

Da $\vec{\mu} \neq 0$, sind die b_k linear abhängig.

(b) Sei $a_1, \dots, a_r$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$. Da $a_i \in \mathrm{Bild}(A)$, existieren $b_1, \dots, b_r$ mit $a_i = Ab_i$, $i = 1, \dots, r$. Ferner gilt: $a_i \in \mathrm{Bild}(AW)$, denn $a_i = (AW)(W^{-1}b_i)$ (W ist regulär!). Daraus folgt $\dim(\mathrm{Bild}(AW)) \geqslant \dim(\mathrm{Bild}(A)) = r$; der Rang von AW ist also größer gleich dem Rang von A. Da $\mathrm{Bild}(AW) \subseteq \mathrm{Bild}(A)$, folgt $\dim(\mathrm{Bild}(AW)) \leqslant \dim(\mathrm{Bild}(A)) = r$. Also ist der Rang von AW gleich dem Rang von A.

Ähnlich zeigt man, dass der Rang von UAW gleich dem Rang von AW ist, wobei man benutzt, dass für jede Matrix M der Rang von M gleich dem Rang von M^T ist.

— bitte wenden —

Aufgabe 10

Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{2}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 6Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to -\frac{1}{3}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + \frac{7}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In der Zeilennormalform von A gibt es drei nichtverschwindende Zeilen, also hat A Rang 3. Daher ist $\dim \operatorname{Bild}(A) = 3$, so dass $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{C}^3$ folgt. Eine Basis von $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{C}^3$ ist etwa gegeben durch $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Der Zeilennormalform von A lesen wir ab $\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$, also ist $(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\operatorname{Kern}(A)$.

Nun zur Matrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(j=2,3,4)]{Z_j \to Z_j - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2]{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3]{Z_4 \to Z_4 + Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} =: \widetilde{B}$$

Fall 1: $\alpha = 10$ und $\beta = 4$. In diesem Fall steht die Zeilennormalform von B bereits da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da hier genau 3 nichtverschwindende Zeilen existieren, hat B in diesem Fall Rang 3. Wegen $\dim \operatorname{Bild}(B) = \operatorname{rang}(B) = 3$ müssen wir zur Angabe einer Basis von $\operatorname{Bild}(B)$ drei linear unabhängige Vektoren aus $\operatorname{Bild}(B)$ finden. Der Zeilennormalform von B können wir entnehmen, dass der erste, zweite und dritte Spaltenvektor von B, d.h. $B\vec{e}_1, B\vec{e}_2, B\vec{e}_3 \in \operatorname{Bild}(B)$,

— bitte wenden —

linear unabhängig sind. Somit ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\\-1\end{pmatrix}\right).$$

(Die Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ ist keineswegs eindeutig bestimmt, wir könnten beispielsweise auch die drei linear unabhängigen Vektoren $B\vec{e}_1, B\vec{e}_2, B\vec{e}_5$ als Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ nehmen.)

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir der Zeilennormalform von B ab, dass $\left(\begin{pmatrix}6\\-1\\-4\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(B)$ ist.

Fall 2: $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$. Dann erhalten wir

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\beta-4)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix}1&0&0&6&3\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-4&-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_4} \begin{pmatrix}1&0&0&6&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-4&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

und lesen ab: In diesem Fall hat B Rang 4. Wegen $\dim \mathrm{Bild}(B) = 4$ gilt $\mathrm{Bild}(B) = \mathbb{C}^4$, so dass eine Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ etwa durch $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ gegeben ist. Der Zeilennormalform von B entnehmen wir $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}6\\-1\\-4\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$, also ist $\left(\begin{pmatrix}6\\-1\\-4\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(B)$.

Fall 3: $\alpha \neq 10$. Dann setzen wir $\delta := (\beta - 4)/(\alpha - 10)$ und erhalten

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\alpha-10)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix}1&0&0&6&3\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-4&-1\\0&0&0&1&\delta\end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 4Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 6Z_4,\ Z_2 \to Z_2 + Z_4} \begin{pmatrix}1&0&0&0&3-6\delta\\0&1&0&0&\delta\\0&0&1&0&-1+4\delta\\0&0&0&1&\delta\end{pmatrix}.$$

Die Matrix B besitzt somit auch in diesem Fall Rang 4. Wegen $\dim \mathrm{Bild}(B) = 4$ gilt $\mathrm{Bild}(B) = \mathbb{C}^4$, so dass eine Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ etwa durch $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ gegeben ist. Der Zeilennormalform von B lesen wir ab $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}3-6\delta\\\delta\\-1+4\delta\\\delta\\-1\end{pmatrix}\right)$, also ist $\left(\begin{pmatrix}3-6\delta\\\delta\\-1+4\delta\\\delta\\-1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(B)$.

Aufgabe 11

a) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

liegt bereits in Zeilennormalform vor:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(Stellen wir uns hier das Endergebnis beim Lösungsalgorithmus vor, so wären hier womöglich noch Nullzeilen). Nun verwenden wir den (-1)-Ergänzungstrick (Dafür muss die Zeilennormalform vorliegen!). In jeder Spalte der Koeffizientenmatrix sollte eine neue Stufe anfangen. Dies erzwingen wir, indem wir zwei Zeilen der Form $0 \dots 0\ -1\ 0 \dots 0$ einfügen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Jetzt können wir die Lösung ablesen: die beiden *Spalten* mit den neu hinzugekommenen Stufen (an den -1-en erkennbar) sind eine Basis des homogenen Lösungsraums und die letzte *Spalte* ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems. Für die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Das Einfügen jener -1-Zeilen ist nichts anderes als das Setzen von freien Parametern. Betrachten wir das ursprüngliche Gleichungssystem mit Variablen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

setzen zwei Parameter (aber mit Minuszeichen)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

lassen in jeder Zeile nur eine Variable stehen

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + \lambda + 2\mu \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 &= 1 + 4\mu \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

— bitte wenden —

und schreiben vektoriell

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ -2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 & = & -3 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 & = & -1 \end{array}$$

zu lösen, bestimmen wir die Zeilennormalform der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 + 2Z_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_2]{\substack{Z_2 \to -Z_2 \\ Z_3 \to -\frac{1}{3}Z_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und verwenden den (-1)-Ergänzungstrick, d.h. wir lassen Nullzeilen in der Zeilennormalform weg und ergänzen Zeilen mit -1 und sonst Nullen so, dass auf der Diagonalen nur ± 1 steht:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Nun können wir die allgemeine Lösung $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ des Gleichungssystems ablesen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 12

a) Wir verwenden die Kirchhoffschen Gesetze, um das Gleichungssystem aufzustellen: Die Knotenregel liefert die Gleichungen

$$I = I_1 + I_2 \qquad \text{und} \qquad I_2 = I_3 + I_4\,.$$

Die Maschenregel liefert zwei weitere Gleichungen, nämlich

$$R_3 I_3 = R_4 I_4 \qquad \text{und} \qquad R_1 I_1 = R_2 I_2 + R_3 I_3\,.$$

(Die Maschenregel liefert auch noch $R_1 I_1 = R_2 I_2 + R_4 I_4$, aber diese Information ist in den beiden anderen Gleichungen bereits enthalten.) Insgesamt ergibt sich mit den gegebenen Werten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= 1 \\ I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \\ \alpha I_3 - \beta I_4 &= 0 \\ \alpha I_1 - \alpha I_2 - \alpha I_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) Wir betrachten nun die zugehörige erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & -\alpha & -\alpha & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - \alpha Z_1]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & -2\alpha & -\alpha & 0 & -\alpha \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 2\alpha Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha & -2\alpha & -\alpha \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3 Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha - 3\beta & -\alpha \end{array}\right) =: B$$

Fall 1: Für $\delta := 2\alpha + 3\beta \neq 0$ erhalten wir

$$\xrightarrow{Z_4 \to -Z_4/\delta} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{Z_2 \to Z_2 + Z_4 \\ Z_3 \to Z_3 + \beta Z_4}]{Z_1 \to Z_1 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha/\delta \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha/\delta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha\beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{array}\right) =: B_1$$

Fall 1.1: Ist zusätzlich $\alpha \neq 0$, so geht es weiter wie folgt:

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3/\alpha} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha/\delta \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha/\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 - (\alpha+\beta)/\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (\alpha+\beta)/\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem ist folglich eindeutig lösbar; man hat

$$I_1 = 1 - \frac{\alpha+\beta}{\delta} = \frac{\alpha + 2\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_2 = \frac{\alpha+\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_3 = \frac{\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_4 = \frac{\alpha}{2\alpha+3\beta}\,.$$

Fall 1.2: Ist dagegen $\alpha = 0$, so haben wir

$$B_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Sämtliche Lösungen dieses inhomogenen Systems erhalten wir, indem wir $I_3 = \lambda$ wählen. Dann ergibt sich $I_1 = 1 - \lambda$, $I_2 = \lambda$ und $I_4 = 0$. Die allgemeine Lösung lautet folglich

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})\,.$$

Fall 2: Gilt $2\alpha + 3\beta = 0$, also $\beta = -\frac{2}{3}\alpha$, so ist

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{2}{3}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{array}\right).$$

Fall 2.1: Für $\alpha \neq 0$ folgt wegen der letzten Zeile: Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

Fall 2.2: Ist dagegen $\alpha = 0$, so haben wir

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir können $I_3 = \lambda$ und $I_4 = \mu$ beliebig wählen; dann folgt $I_1 = 1-\lambda-\mu$ und $I_2 = \lambda+\mu$. Die allgemeine Lösung ist daher in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C})\,.$$

(Alternativ hätte auch der (-1)-Ergänzungstrick auf dieses Ergebnis geführt.)

Aus physikalischer Sicht sind nur Werte $\alpha, \beta > 0$ sinnvoll. Dann haben wir stets Fall 1.1 und damit eindeutige Lösbarkeit.