Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
9.05.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

4. Übungsblatt

Aufgabe 13

Es seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Die Komponenten der Vektoren bezeichnen wir in üblicher Weise, d.h. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ etc. Beschreiben Sie die folgende Menge geometrisch:

$$X := \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : \det \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ a_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0\}.$$

Aufgabe 14

Gegeben sei die Funktion $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{(n,n)}$, $x \mapsto A(x)$. A sei stetig differenzierbar in x, d.h. die Funktionen $x \mapsto (A(x))_{jk}$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ sind stetig differenzierbar. Entwickeln Sie eine Formel für die Ableitung der Funktion $x \mapsto \det A(x)$.

Hinweis: Es seien $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ die Spalten der Matrix A. Versuchen Sie, den Differenzenquotienten

$$\frac{\det A(x+h) - \det A(x)}{h}$$

unter Ausnutzung der Rechenregeln für Determinaten in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} \det(\phi_1(x), \ldots, \phi_{\nu-1}(x), \quad (*) \quad , \phi_{\nu+1}(x+h), \ldots, \phi_n(x+h))$$

zu schreiben. Hierbei bezeichnet $(*)$ einen noch näher zu bestimmenden Spaltenvektor.

Aufgabe 15

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist C regulär?

Aufgabe 16

Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ mit $A^*A = E_n$ heißt *unitär*.

a) Begründen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n.n)}$ genau dann unitär ist, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ bilden.

b) Ergänzen Sie einen dritten Vektor so, dass die Vektoren die Spalten einer unitären Matrix bilden:

$$\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}.$$

c) Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ eine unitäre Matrix. Zeigen Sie: $\langle A\vec{z}, A\vec{z} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle$ für alle $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$.
Hinweis: Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird das Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$ bezeichnet.

Achtung:

Beachten Sie bitte die Hinweise auf der Seite

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etec2013s/.

Hinweis Die Löungen zum Übungsblatt werden in den Tutorien besprochen.