Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
9.05.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

4. Übungsblatt

Aufgabe 13

Sei $\vec{a} \in X$. Das Verschwinden der Determinante in der Definition von X bedeutet, dass die Spalten der Matrix linear abhängig sind, d.h. es gibt $\lambda_0, \dots, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Wäre $\lambda_0 = 0$, wären die drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ linear abhängig, was wir aber von Vornherein ausgeschlossen hatten. Also könnnen wir $(*)$ durch λ_0 dividieren und erhalten

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Zahlen $\mu_1, \dots, \mu_3$. Die ersten drei Zeilen ergeben

$$\vec{a} = \mu_1 \vec{x} + \mu_2 \vec{y} + \mu_3 \vec{z}$$

und die letzte Zeile ergibt $1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, also $\mu_3 = 1 - \mu_1 - \mu_2$. Das liefert uns

$$\vec{a} = \mu_1(\vec{x} - \vec{z}) + \mu_2(\vec{y} - \vec{z}) + \vec{z}.$$

Der Vektor $\vec{a}$ liegt also in der Ebene, welche durch den Endpunkt des Vektors $\vec{z}$ geht und durch die (aufspannenden) Richtungsvektoren $(\vec{x} - \vec{z}), (\vec{y} - \vec{z})$ beschrieben wird. X ist also gerade die Ebene, welche durch die drei Endpunkte der Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ definiert wird, wenn man die Vektoren vom Ursprung aus einzeichnet.

Aufgabe 14

Um die Funktion $x \mapsto \det A(x)$ abzuleiten, betrachten wir den Differenzenquotienten, genauer zunächst einmal die Differenz $\Delta_h := \det A(x+h) - \det A(x)$. Diese lautet ausgeschrieben

$$\det(\phi_1(x+h), \dots, \phi_n(x+h)) - \det(\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)).$$

Nun nutzen wir die Multilinearität der Determinante in den Spalten aus. Zur Erinnerung:

$$\det(\phi_1, \dots, \phi_j + \mu\psi, \dots, \phi_n) = \det(\phi_1, \dots, \phi_j, \dots, \phi_n) + \mu \det(\phi_1, \dots, \psi, \dots, \phi_n)$$

für beliebige $j \in \mathbb{N}$ und Spaltenvektoren $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$.

— bitte wenden —

Es gilt daher (!)

$$\begin{aligned}\det(\phi_1(x+h),\dots,\phi_n(x+h)) &= \det(\phi_1(x+h)-\phi_1(x),\phi_2(x+h),\dots,\phi_n(x+h)) \\ &\quad + \det(\phi_1(x),\phi_2(x+h),\dots,\phi_n(x+h)).\end{aligned}$$

Jetzt machen wir dasselbe mit dem zweiten Summanden und setzen die Rechnung fort:

$$\begin{aligned} = {} & \det(\phi_1(x+h)-\phi_1(x),\phi_2(x+h),\dots,\phi_n(x+h)) + \det(\phi_1(x),\phi_2(x+h)-\phi_2(x),\dots,\phi_n(x+h)) \\ & + \det(\phi_1(x),\phi_2(x),\phi_3(x+h)\dots,\phi_n(x+h)).\end{aligned}$$

Nach demselben Prinzip erhält man so

$$\begin{aligned} \det(\phi_1(x+h),\dots,\phi_n(x+h)) = {} & \\ \sum_{\nu=1}^{n} \det(\phi_1(x),\dots,\phi_{\nu-1}(x),\phi_\nu(x+h)-\phi_\nu(x),\phi_{\nu+1}(x+h),\dots,\phi_n(x+h)) & \\ + \det(\phi_1(x),\phi_2(x),\dots,\phi_n(x)) & \end{aligned}$$

und daher

$$\Delta_h = \sum_{\nu=1}^{n} \det(\phi_1(x),\dots,\phi_{\nu-1}(x),\phi_\nu(x+h)-\phi_\nu(x),\phi_{\nu+1}(x+h),\dots,\phi_n(x+h)).$$

Nach Division durch $h \neq 0$ und nochmaliger Ausnutzung der Multilinearität:

$$\frac{\Delta_h}{h} = \sum_{\nu=1}^{n} \det\left(\phi_1(x),\dots,\phi_{\nu-1}(x),\frac{\phi_\nu(x+h)-\phi_\nu(x)}{h},\phi_{\nu+1}(x+h),\dots,\phi_n(x+h)\right).$$

Die Differenzenquotienten $\frac{\phi_\nu(x+h)-\phi_\mu(x)}{h}$ konvergieren für $h \to 0$ gegen $\phi'_\nu(x)$; da die Determinante ein Ausdruck ist, der aus Multiplikationen und Additionen der einzelnen Matrixeinträge aufgebaut ist, gilt für $h \to 0$:

$$(\det A)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h}{h} = \sum_{\nu=1}^{n} \det(\phi_1(x),\dots,\phi_{\nu-1}(x),\phi'_\nu(x),\phi_{\nu+1}(x),\dots,\phi_n(x)).$$

Aufgabe 15

Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz.
[Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\begin{aligned}\det(A) &=_{[S_1\to S_1+S_2]} \det\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} =_{[Z_4\to Z_4-Z_1]} \det\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\\ &=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} =_{[Z_2\to Z_2-Z_1]} 2\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\\ &=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = -2\big((-2)\cdot 2 - 2\cdot 2\big) = 16.\end{aligned}$$

Bei der Matrix B gehen wir genauso vor:

$$\det(B) =_{[Z_1\to Z_1+Z_4]} \det\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 4 & 0\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix} =_{[S_j\to S_j-S_1, j=2,3,4]} \det\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 2\\ 3 & -4 & 1 & -3\\ 4 & -1 & -2 & -3\end{pmatrix}$$
$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ -4 & 1 & -3\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix} =_{[Z_1\to Z_1+Z_3]} 5\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ -4 & 1 & -3\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}$$
$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} -4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix} = -5(8+1) = -45.$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\det(C) =_{[Z_1\to Z_1-Z_4]} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1 & \alpha\end{pmatrix} =_{[S_4\to S_4-S_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & \alpha-3\end{pmatrix}$$
$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \alpha-3\end{pmatrix} =_{[S_3\to S_3-S_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \alpha-4\end{pmatrix}$$
$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & \alpha-4\end{pmatrix} = \alpha-4-1 = \alpha-5.$$

Man sieht: $\det C \neq 0 \iff \alpha \neq 5$. Daher ist C genau für $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{5\}$ regulär.

Aufgabe 16

a) Vorüberlegung: Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ eine Matrix. Bezeichnet $\vec{a}_j$ die j-te Spalte von A, so gilt

$$A^*A = \begin{pmatrix} \overline{\vec{a}_1}^T\\ \overline{\vec{a}_2}^T\\ \vdots\\ \overline{\vec{a}_n}^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\vec{a}_1}^T\vec{a}_1 & \overline{\vec{a}_1}^T\vec{a}_2 & \cdots & \overline{\vec{a}_1}^T\vec{a}_n\\ \overline{\vec{a}_2}^T\vec{a}_1 & \overline{\vec{a}_2}^T\vec{a}_2 & \cdots & \overline{\vec{a}_2}^T\vec{a}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{\vec{a}_n}^T\vec{a}_1 & \overline{\vec{a}_n}^T\vec{a}_2 & \cdots & \overline{\vec{a}_n}^T\vec{a}_n\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \langle\vec{a}_1,\vec{a}_1\rangle & \langle\vec{a}_2,\vec{a}_1\rangle & \cdots & \langle\vec{a}_n,\vec{a}_1\rangle\\ \langle\vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle & \langle\vec{a}_2,\vec{a}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{a}_n,\vec{a}_2\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle\vec{a}_1,\vec{a}_n\rangle & \langle\vec{a}_2,\vec{a}_n\rangle & \cdots & \langle\vec{a}_n,\vec{a}_n\rangle\end{pmatrix}.$$

In A^*A ist also $\langle\vec{a}_j,\vec{a}_k\rangle$ das Element in der k-ten Zeile und j-ten Spalte. Hiermit erhalten wir

$$A \text{ ist unitär} \iff A^*A = E_n \iff \langle\vec{a}_j,\vec{a}_k\rangle = \delta_{jk} \text{ für alle } j,k\in\{1,2,\dots,n\}$$
$$\overset{\dim\mathbb{C}^n=n}{\iff} (\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n) \text{ ist Orthonormalbasis des } \mathbb{C}^n.$$

b) Die beiden gegebenen Vektoren haben Norm 1 und sind orthogonal zueinander. Wir suchen nun einen Vektor $\vec{z} = (z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3$ mit

$$\langle\vec{z},\begin{pmatrix} i/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}\rangle = 0 \qquad\text{und}\qquad \langle\vec{z},\begin{pmatrix} 1/2\\ -i/2\\ (1-i)/2\end{pmatrix}\rangle = 0\,.$$

Komponentenweise geschrieben (und mit $\sqrt{2}$ bzw. 2 durchmultipliziert) heißt das

$$-iz_1 - z_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad z_1 + iz_2 + (1+i)z_3 = 0\,.$$

Die erste Gleichung können wir mit $z_1 = 1$ und $z_2 = -i$ erfüllen. Die zweite Gleichung liefert dann $2 + (1+i)z_3 = 0$, also $z_3 = -2/(1+i) = -1+i$. Den so gefundenen Vektor $\vec{z}$ müssen wir nun noch normieren, also durch seine Norm teilen. Wir ergänzen daher den Vektor

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Der zu ergänzende Vektor ist nicht eindeutig bestimmt; man kann ihn mit beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$, für die $|c| = 1$ gilt, multiplizieren.

c) Im folgenden sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ eine unitäre Matrix.

i) Sei $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt

$$\|A\vec{z}\|^2 = \langle A\vec{z}, A\vec{z}\rangle = (\overline{A}\,\overline{\vec{z}})^T\,A\vec{z} = \overline{\vec{z}}^T\,\overline{A}^T\,A\vec{z} = \overline{\vec{z}}^T\,(A^*\,A)\vec{z} = \overline{\vec{z}}^T\,\vec{z} = \langle \vec{z}, \vec{z}\rangle = \|\vec{z}\|^2.$$

ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $\vec{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann erhält man mit **i)**

$$\|\vec{z}\|^2 = \langle \vec{z}, \vec{z}\rangle = \langle A\vec{z}, A\vec{z}\rangle = \langle \lambda\vec{z}, \lambda\vec{z}\rangle = \lambda\langle \vec{z}, \lambda\vec{z}\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle \vec{z}, \vec{z}\rangle = |\lambda|^2\langle \vec{z}, \vec{z}\rangle = |\lambda|^2\|\vec{z}\|^2.$$

Division mit $\|\vec{z}\|^2 \neq 0$ liefert $|\lambda|^2 = 1$, also $|\lambda| = 1$.