Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
15.05.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

5. Übungsblatt

Aufgabe 17

Aus $AB = 0$ folgt mit dem Determinantenmultiplikationssatz (siehe Vorlesung):

$$0 = \det(AB) = \det(A)\det(B),$$

also $\det A = 0$ oder $\det B = 0$. Wir nehmen nun an $\det A = 0$, aber $\det B \neq 0$. Dann wäre nach Vorlesung die Matrix B invertierbar, man kann die Gleichung $0 = AB$ also von rechts mit B^{-1} multiplizieren und erhält $0 = ABB^{-1} = A$, im Widerspruch zur Voraussetzung $A \neq 0$. Im Fall $\det A \neq 0, \det B = 0$ argumentiert man entsprechend. Letztendlich folgt: $\det A = 0$ und $\det B = 0$.

Aufgabe 18

a) Die Aussage ist **richtig**. Ist A unitär und λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v}$, so gilt zum einen $(A\vec{v}|A\vec{v}) = (\vec{v}|\vec{v}) = \|\vec{v}\|^2$ (hier haben wir benutzt, dass A unitär ist). Andererseits gilt aber auch: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, also $(A\vec{v}|A\vec{v}) = (\lambda\vec{v}|\lambda\vec{v}) = |\lambda|^2(\vec{v}|\vec{v}) = |\lambda|^2\|\vec{v}\|^2$. Zusammen ergibt sich $\|\vec{v}\|^2 = |\lambda|^2\|\vec{v}\|^2$ und da $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A und somit $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist, folgt $|\lambda|^2 = 1$.

b) Diese Aussage ist im Allgemeinen **falsch**. Betrachte z.B. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte von B sind die Nullstellen von $\det(B - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$, also $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = +i$.

Beachte: Symmetrische Matrizen besitzen nur reelle Eigenwerte (Satz in 18.7.) und auch falls n ungerade ist, muss es immer einen reellen Eigenwert geben: Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Eigenwert von B (mit Eigenvektor v), so ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von B (mit Eigenvektor $\bar{v}$), d.h. komplexe Eigenwerte - reeller Matrizen! - tauchen immer in Paaren auf (und haben die gleiche algebraische Vielfachheit). Da die Summe der algebraischen Vielfachheiten n ergibt, muss es mind. einen reellen Eigenwert geben (sonst wäre die Summe der Vielfachheiten gerade).

c) Die Aussage ist **richtig**: Ist $\vec{v}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so gilt: $A^2\vec{v} = AA\vec{v} = A\lambda\vec{v} = \lambda A\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$.

Aufgabe 19

Zunächst zur Matrix A: Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3)$. Dieses lautet

$$\det\begin{pmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_2]} \det\begin{pmatrix} 18-\lambda & -18+\lambda & 0 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$
$$=_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \det\begin{pmatrix} 0 & -18+\lambda & 0 \\ 20-\lambda & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } Z_1]} (18-\lambda)\det\begin{pmatrix} 20-\lambda & -4 \\ 1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (18-\lambda)\big((20-\lambda)(16-\lambda)+4\big) = (18-\lambda)\big(\lambda^2 - 36\lambda + 324) = -(\lambda-18)^3.$$

Wegen $\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 18$ besitzt die Matrix A nur den Eigenwert 18; dieser hat die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum $E_A(18)$ ist die Menge aller $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ mit $A\vec{x} = 18\vec{x}$ bzw. $(A - 18E_3)\vec{x} = \vec{0}$, also genau $\mathrm{Kern}(A - 18E_3)$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 18E_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \frac{1}{2}Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{4}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(18) = \mathrm{Kern}(A - 18E_3) = \{s\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{C}\} = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Der Eigenwert 18 hat die geometrische Vielfachheit 2, weil der Eigenraum $E_A(18)$ zweidimensional ist. Da die geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 18 nicht übereinstimmen, ist A nicht diagonalisierbar, d.h. es gibt keine reguläre Matrix $S_A \in \mathbb{C}^{(3,3)}$ so, dass $S_A^{-1}AS_A$ eine Diagonalmatrix ist.

Jetzt zur Matrix B: Wir berechnen das zugehörige charakteristische Polynom

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_1 \to Z_1 + (1-\lambda)Z_3 \\ Z_2 \to Z_2 + 2Z_3}\right]} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 2-2\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$=_{[\text{Entw. n. } S_1]} -\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} = -\big(2 - 2\lambda - \lambda^2(1-\lambda)\big) = (\lambda^2 - 2)(1-\lambda)\,.$$

Wegen $\chi_B(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ hat die Matrix B die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Diese haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1.
Wir bestimmen nun den Eigenraum $E_B(1)$ zu $\lambda_1 = 1$, also die Menge aller $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ mit $(B - E_3)\vec{x} = \vec{0}$:

$$B - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_2 \to Z_2 + 2Z_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -Z_1,\, Z_2 \to -Z_2]{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

— bitte wenden —

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_B(1) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Der Eigenwert 1 besitzt die geometrische Vielfachheit 1, weil der zugehörige Eigenraum eindimensional ist.
Schließlich müssen wir noch die zu den beiden Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ gehörenden Eigenräume bestimmen. Analoges Vorgehen wie eben ergibt

$$E_B(\sqrt{2}\,) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad \text{und} \qquad E_B(-\sqrt{2}\,) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Die geometrische Vielfachheit von $\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ beträgt jeweils 1. Die Matrix B ist diagonalisierbar, weil für jeden Eigenwert von B geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen. Eine reguläre Matrix S so, dass $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat, erhält man folgendermaßen: Man wähle in jedem Eigenraum eine Basis und schreibe die Basisvektoren als Spalten $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$ in eine Matrix S. Ist λ_j der Eigenwert zum Eigenvektor $\vec{s}_j$, so erhält man $BS = SD$, wobei D die Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonalen ist (die Matrix SD hat die Spalten $\lambda_1\vec{s}_1, \lambda_2\vec{s}_2, \ldots, \lambda_n\vec{s}_n$). Die Matrix S ist regulär und es ist $S^{-1}BS = D$. Definieren wir

$$S := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{dann gilt} \qquad S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die Wahl von S ist nicht eindeutig, so ergibt sich z.B. für

$$\widetilde{S} := \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 & 0 & -\sqrt{2}-2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}: \qquad \widetilde{S}^{-1}B\widetilde{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 20

Wir berechnen das charakteristische Polynom von A: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_4)$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_3 \to Z_3 + Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_2}\right]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2 \to S_2 + S_4]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\mathrm{Entw.}Z_4]} (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2 \to S_2 - S_3]} (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\mathrm{Entw.}Z_3]} (4-\lambda)^2\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2\big((3-\lambda)(1-\lambda) - 3\big) = (4-\lambda)^2(\lambda^2 - 4\lambda) = \lambda(\lambda-4)^3.$$

Die Matrix A besitzt also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3). Wir bestimmen nun die Eigenräume:

— bitte wenden —

Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das Gleichungssystem $(A - 0E_4)\vec{x} = \vec{0}$, also $A\vec{x} = \vec{0}$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 \to Z_3 + Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_2}]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 + 2Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir $x_4 \in \mathbb{R}$ beliebig, so folgt aus der ersten/letzten Zeile $x_3 = -x_4$, aus der dritten $x_2 = x_4$ und aus der zweiten dann $x_1 = -x_4$. Wir haben also den eindimensionalen Eigenraum

$$E(0) = \{ \begin{pmatrix} -x_4 \\ x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Lin}(\vec{c}_1)\,, \qquad \text{wobei} \quad \vec{c}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt zu $\lambda_2 = 4$:

$$A - 4E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 \to Z_3 - Z_1 \\ Z_4 \to Z_4 + Z_1}]{Z_2 \to Z_2 + Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E(4) = \mathrm{Lin}(\vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4)\,, \qquad \vec{c}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist als reelle, symmetrische Matrix diagonalisierbar (Alternativ könnte man mit den geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte argumentieren). Da $(\vec{c}_1)$ eine Basis von $E(0)$ und $(\vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4)$ eine Basis von $E(4)$ ist, gilt für die Matrix S mit den Spalten $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da $A \in \mathbb{R}^{(4,4)}$ symmetrisch ist, gibt es sogar eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{(4,4)}$ mit

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Um ein solches P anzugeben, bestimmen wir jeweils eine Orthonormalbasis der Eigenräume. Eine Orthonormalbasis von $E(0)$ ist z.B. gegeben durch $\vec{b}_1 := \frac{1}{\|\vec{c}_1\|}\,\vec{c}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $E(4)$ verwenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\vec{b}_2 := \frac{1}{\|\vec{c}_2\|}\,\vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 := \vec{c}_3 - \langle \vec{c}_3, \vec{b}_2\rangle \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_3 := \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\,\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_4 := \vec{c}_4 - \langle \vec{c}_4, \vec{b}_2\rangle \vec{b}_2 - \langle \vec{c}_4, \vec{b}_3\rangle \vec{b}_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_4 := \frac{1}{\|\vec{v}_4\|}\,\vec{v}_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

Somit bildet $(\vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$ eine Orthonormalbasis von $E(4)$.
Besitzt die Matrix P die Spalten $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$, dann ist P orthogonal (d.h. $P^{-1} = P^T$) und es gilt

$$P^T A P = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 21

a) Wir berechnen zunächst die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A. Für das charakteristische Polynom von A ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \det\begin{pmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{pmatrix} =_{[Z_3\to Z_3-Z_2]} \det\begin{pmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=_{[S_3\to S_2+S_3]} \det\begin{pmatrix}2-\lambda&1&2\\1&2-\lambda&3-\lambda\\0&\lambda-1&0\end{pmatrix} =_{[\text{Entw. } Z_3]} -(\lambda-1)\det\begin{pmatrix}2-\lambda&2\\1&3-\lambda\end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda-1)\big((2-\lambda)(3-\lambda)-2\big) = -(\lambda-1)\big(\lambda^2-5\lambda+4\big) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4).$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A, also $1, 4$. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E(1) = \mathrm{Kern}(A - E_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}),$$

$$E(4) = \mathrm{Kern}(A - 4E_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Da $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar. Aus dem gleichen Grund gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Um ein solches S zu bestimmen, muss man eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A angeben.

Setze

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E(4) \qquad \text{sowie} \qquad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E(1).$$

Da $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ symmetrisch ist, stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander, also gilt $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$. Ist

$$\vec{v}_3 := \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

definiert, so sind $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_1$ und $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_2$. Wegen $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ folgt, dass die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind und somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Aufgrund von $\vec{v}_1 \in E(4)$, $\dim E(4) = 1$ und $\dim E(1) = 2$ ergibt sich $E(1) = \mathrm{Lin}(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Folglich ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A gegeben durch

$$(\frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1, \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2, \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}).$$

Deshalb ist die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

orthogonal und es gilt

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = 2\vec{x}$ hat die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Würde $A\vec{x} = 2\vec{x}$ für ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ gelten, dann wäre 2 ein Eigenwert von A, was aber nach **a)** nicht der Fall ist. Folglich ist $\vec{x} = \vec{0}$ die einzige Lösung von $A\vec{x} = 2\vec{x}$.