Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
23.05.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

6. Übungsblatt

Aufgabe 22

Die Kurve $\vec{r}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} \operatorname{Arcsin} t \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \qquad (t \in [-1,1]).$$

Sei $t_0 \in (-1,1)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangente in $\vec{r}(t_0)$ an, d.h. eine Gerade der Form

$$\{\vec{a} + \lambda \vec{b} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$(\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3)$ welche die geometrische Tangente an die Kurve im Punkt $\vec{r}(t_0)$ darstellt.

Aufgabe 23

Berechnen Sie für eine feste Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$:

(i) $\operatorname{rot}(A\vec{x})$ (d.h. die Rotation des Vektorfeldes $\vec{x} \mapsto A\vec{x}, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$)

(ii) $\operatorname{div}(A\vec{x})$

Berechnen Sie ferner $(\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{rot}\Big(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\Big), \operatorname{div} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \nabla(\|\vec{x}\|^2).$$

Aufgabe 24

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + ax_3 \\ bx_1 - 3x_2 - x_3 \\ 4x_1 + cx_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

ein auf $\mathbb{R}^3$ definiertes Vektorfeld. Bestimmen Sie Zahlen a, b, c derart, dass $\nabla \times \vec{v}(\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt. Zeigen Sie, dass es für die so bestimmten Werte von a, b, c eine stetig partiell differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla \phi = \vec{v}$$

auf $\mathbb{R}^3$ existiert.

— bitte wenden —

Aufgabe 25

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen.

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto (x^2 + y^2)e^{xy}$

c) $f\colon \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto xe^y/z$

Berechnen Sie auch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung. Ermitteln Sie zusätzlich in **b)** die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f$ von f in Richtung $\vec{v} := (1,1)$.

Aufgabe 26

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie in jedem Punkt die partiellen Ableitungen von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f(0,0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $D_{\vec{v}}f(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v}$?

— bitte wenden —