Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
23.05.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

6. Übungsblatt

Aufgabe 22

Für $-1 < t < 1$ gilt

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t^2} \\ 1 \\ -t/\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

Für $t_0 \in (-1, 1)$ ist daher

$$\vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Arcsin} t_0 \\ t_0 \\ \sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t_0^2} \\ 1 \\ -t_0/\sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt $\vec{r}(t_0)$.

Aufgabe 23

Die Zeilen der Matrix A schreiben wir zunächst als Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, d.h. die k-te Komponente von $\vec{a}_j$ ist gerade der Eintrag der Matrix A in der j-ten Zeile, k-te Spalte $(= A_{jk})$. Damit ist

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{x} \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{x} \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{x} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

und daher

$$\operatorname{rot} A\vec{x} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{x} \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{x} \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2(\vec{a_3} \cdot \vec{x}) - D_3(\vec{a_2} \cdot \vec{x}) \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Nun ist $D_k(\vec{a_j}\vec{x}) = (\vec{a}_j)_k = A_{jk}$ und daher

$$\operatorname{rot} A\vec{x} = \begin{pmatrix} A_{32} - A_{23} \\ A_{13} - A_{31} \\ A_{21} - A_{12} \end{pmatrix}.$$

Mit der Darstellung $(*)$ folgt weiterhin

$$\operatorname{div}(A\vec{x}) = \sum_{j=1}^{3} D_j(\vec{a}_j \cdot \vec{x}) = \sum_{j=1}^{3} (\vec{a}_j)_j = \sum_{j=1}^{3} A_{jj}.$$

Nun berechnen wir $\operatorname{rot}(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|})$: nach der Produktregel aus der Vorlesung (Kap. 29) gilt:

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|} \right) \times \vec{x} + \frac{1}{\|\vec{x}\|} \nabla \times \vec{x}.$$

— bitte wenden —

Eine einfache Rechnung zeigt $\nabla \times \vec{x} = 0$. Nach einer Regel aus der Vorlesung gilt (siehe 29.2)

$$\nabla\left(\frac{1}{\|\vec{x}\|}\right) = -\frac{1}{\|\vec{x}\|^2}\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

und somit $\nabla\left(\frac{1}{\|\vec{x}\|}\right) \times \vec{x} = -\frac{\vec{x}\times\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = 0$. Also $\operatorname{rot}(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}) = 0$.
Genauso gehen wir bei der Berechnung von $\operatorname{div}\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ vor:

$$\operatorname{div}\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \nabla\frac{1}{\|\vec{x}\|}\cdot\vec{x} + \frac{1}{\|\vec{x}\|}\operatorname{div}(\vec{x}).$$

Der erste Term ist $-\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}\cdot\vec{x} = -\frac{1}{\|\vec{x}\|}$, für den zweiten Term beachten wir $\operatorname{div}(\vec{x}) = 3$ (in Komponenten hinschreiben!). Demzufolge gilt $\operatorname{div}\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{2}{\|\vec{x}\|}$.
Schließlich zu $\nabla\|\vec{x}\|^2$. Wir könnten auch hier die Produktregeln anwenden, rechnen aber der Einfachheit halber in Komponentenschreibweise:

$$D_j\|\vec{x}\|^2 = D_j(\sum_{i=1}^{3} x_i^2) = 2x_j$$

(man beachte $D_j x_i^2 = 0$ falls $i \neq j$). Also $\nabla\|\vec{x}\|^2 = 2\vec{x}$.

Aufgabe 24

Zunächst berechnet man:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} c+1 \\ a-4 \\ b-2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt $\nabla \times \vec{v}(\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ genau dann, wenn $a = 4, b = 2, c = -1$.
Um die Existenz einer Funktion ϕ mit $\nabla\phi = \vec{v}$ zu zeigen, versuchen wir diese explizit zu bestimmen. $\nabla\phi = \vec{v}$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} D_1\phi(x_1,x_2,x_3) &= x_1 + 2x_2 + 4x_3, \\ D_2\phi(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1 - 3x_2 - x_3, \\ D_3\phi(x_1,x_2,x_3) &= 4x_1 - x_2 + 2x_3. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt durch Integration nach der ersten Variablen (x_2, x_3 fest):

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = \int_0^{x_1} D_1\phi(z_1,x_2,x_3)\,dz_1 = \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + \phi(0,x_2,x_3). \quad (1)$$

Aus den beiden anderen Gleichungen folgt mit derselben Technik:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= 2x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 - x_2x_3 + \phi(x_1,0,x_3) \quad (2) \\ \phi(\vec{x}) &= 4x_1x_3 - x_2x_3 + x_3^2 + \phi(x_1,x_2,0) \quad (3) \end{aligned}$$

Wir setzen das eben Gefundene sukzessive ein:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + \phi(0,x_2,x_3) \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - \frac{3}{2}x_2^2 - x_2x_3 + \phi(0,0,x_3) \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - \frac{3}{2}x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 + \phi(0,0,0) \end{aligned}$$

— bitte wenden —

(in der zweiten Zeile wurde $\phi(0, x_2, x_3)$ mittels (2) ersetzt, und in der dritten Zeile wurde $\phi(0, 0, x_3)$ mittels (3) ersetzt).
Wir haben den geforderten Existenzbeweis aber noch nicht mathematisch streng erbracht, denn unsere obige Rechnung ging von der Annahme aus, dass ein ϕ mit der geforderten Eigenschaft existiert.
Um die Existenz eines solchen ϕ zu beweisen, können wir trotzdem das Ergebnis der Rechnung benutzen: wir definieren ϕ einfach durch

$$\phi(\vec{x}) := \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - \frac{3}{2}x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2$$

und müssen jetzt nachrechnen, dass $\nabla\phi = \vec{v}$ gilt. Eine kurze Rechnung, die der Leser selbst durchführen sollte, bestätigt dies auch. Man beachte auch, dass $\tilde{\phi} = \phi + c$ mit jeder beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls die geforderte Eigenschaft $\nabla\tilde{\phi} = \vec{v}$ besitzt.

Aufgabe 25

a) Die partielle Ableitung von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach x im Punkt $\vec{x}_0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Richtungsableitung von f in $\vec{x}_0$ in Richtung des ersten Einheitsvektors $\vec{e}_1 = (1, 0)$, also

$$\begin{aligned} D_1 f(\vec{x}_0) &:= D_{\vec{e}_1} f(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_1) - f(\vec{x}_0)\big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f((x, y) + t(1, 0)) - f(x, y)\big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x + t, y) - f(x, y)\big). \end{aligned}$$

Für festes $y \in \mathbb{R}$ ist dies gerade der Differenzenquotient der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$. Um die partielle Ableitung von f nach x zu berechnen, können wir also $f(x, y)$ nach x differenzieren, wobei wir y als eine Konstante betrachten.

Entsprechendes erhalten wir für die partielle Ableitung nach y.

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$D_1 f(x, y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \qquad \text{und} \qquad D_2 f(x, y) = -4x^2y + 12xy^2 + 4y^3\,.$$

Daraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} D_1^2 f(x, y) &= 6x - 4y^2\,, & D_2^2 f(x, y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2\,, \\ D_2D_1 f(x, y) &= -8xy + 12y^2\,, & D_1D_2 f(x, y) &= -8xy + 12y^2\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Dass $D_1D_2f = D_2D_1f$ gilt, war wegen des Satzes von Schwarz schon vorher klar, denn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar.

b) Hier haben wir

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= 2xe^{xy} + (x^2 + y^2)ye^{xy} = (x^2y + 2x + y^3)e^{xy}\,, \\ D_2 f(x, y) &= 2ye^{xy} + (x^2 + y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy}\,. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned} D_1^2 f(x, y) &= (2xy + 2)e^{xy} + (x^2y + y^3 + 2x)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy}\,, \\ D_2^2 f(x, y) &= (2xy + 2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy}\,, \\ D_1D_2 f(x, y) &= (3x^2 + y^2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)ye^{xy} = (x^3y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy} \\ &= D_2D_1 f(x, y)\,. \end{aligned}$$

— bitte wenden —

Nach Definition gilt für die Richtungsableitung von f im Punkt $\vec{x}_0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $\vec{v} = (v_1, v_2) = (1, 1)$

$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}} f(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)\Big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big((x+tv_1)^2 + (y+tv_2)^2\big)e^{(x+tv_1)(y+tv_2)} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + 2txv_1 + t^2v_1^2 + y^2 + 2tyv_2 + t^2v_2^2\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + y^2 + 2t(xv_1 + yv_2) + t^2(v_1^2 + v_2^2)\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big((x^2+y^2)e^{xy}\big(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1\big) + 2t(xv_1+yv_2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} \\
&\qquad\qquad + t^2(v_1^2+v_2^2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}\Big).
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1)$ setzen wir $\alpha := yv_1 + xv_2$ und $\beta := v_1v_2$ und betrachten die durch $g(t) := e^{\alpha t + \beta t^2}$ gegebene Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $g'(t) = (\alpha + 2\beta t)e^{\alpha t + \beta t^2}$. Nun gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g(t) - g(0)) = g'(0) = \alpha = yv_1 + xv_2.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}} f(x,y) &= (x^2+y^2)e^{xy}(yv_1 + xv_2) + 2(xv_1 + yv_2)e^{xy} \cdot 1 + 0 \\
&= e^{xy}\big((x^2+y^2)(y+x) + 2(x+y)\big) \\
&= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).
\end{aligned}$$

Die Richtungsableitung $D_{\vec{v}} f$ kann man auch eleganter bestimmen: Da die partiellen Ableitungen $D_1 f, D_2 f$ von f stetig sind, ist f differenzierbar. Deshalb gilt nach Satz 1 in 30.4 für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}} f(x,y) &= f'(x,y)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = e^{xy}\begin{pmatrix} x^2y + 2x + y^3 & x^3 + xy^2 + 2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= e^{xy}\left(x^2y + 2x + y^3 + x^3 + xy^2 + 2y\right) = e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).
\end{aligned}$$

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in (0, \infty)$ sind

$$D_1 f(x,y,z) = e^y/z\,, \qquad D_2 f(x,y,z) = xe^y/z\,, \qquad D_3 f(x,y,z) = -xe^y/z^2\,.$$

Weiter haben wir

$$D_1^2 f(x,y,z) = 0\,, \qquad D_2^2 f(x,y,z) = xe^y/z\,, \qquad D_3^2 f(x,y,z) = 2xe^y/z^3\,.$$

Und schließlich noch die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
D_2 D_1 f(x,y,z) &= e^y/z = D_1 D_2 f(x,y,z)\,, \\
D_3 D_1 f(x,y,z) &= -e^y/z^2 = D_1 D_3 f(x,y,z)\,, \\
D_3 D_2 f(x,y,z) &= -xe^y/z^2 = D_2 D_3 f(x,y,z)\,.
\end{aligned}$$

— bitte wenden —

Aufgabe 26

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Stetigkeit von f in $(0,0)$: Gilt $(0,0) \neq (x_k, y_k) \to (0,0)$, so folgt $m_k := \max\{|x_k|, |y_k|\} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, und dies liefert dann

$$|f(x_k, y_k)| \leqslant \frac{|y_k^3| + |x_k^2 y_k|}{x_k^2 + y_k^2} \leqslant \frac{m_k^3 + m_k^3}{m_k^2} = 2m_k \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

Das bedeutet $f(x_k, y_k) \to 0 = f(0,0)$, womit die Stetigkeit von f auf ganz $\mathbb{R}^2$ bewiesen ist.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ erhalten wir mit Hilfe der Quotientenregel

$$D_1 f(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$D_2 f(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2y^2 - x^4 + y^4}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Im Punkt $(0,0)$ dagegen müssen wir auf die Definition der partiellen Ableitung zurückgehen:

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

und

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 - 0}{0 + t^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1\,.$$

c) Wegen

$$D_1 f(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}) = -\frac{4k^{-4}}{(k^{-2} + k^{-2})^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 0 = D_1 f(0,0)$$

und

$$D_2 f(\tfrac{1}{k}, 0) = \frac{0 - k^{-4} + 0}{(k^{-2} + 0)^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 1 = D_2 f(0,0)$$

sind die partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$ nicht stetig.

d) Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0) + h\vec{v}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(hv_2)^3 - (hv_1)^2 hv_2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 v_2^3 - h^3 v_1^2 v_2}{h^3(v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\,. \end{aligned}$$

Dies soll nun mit

$$(\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2$$

verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = v_2 \iff v_2^3 - v_1^2 v_2 = v_2(v_1^2 + v_2^2) \iff 2v_1^2 v_2 = 0\,.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

— bitte wenden —