Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
29.05.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

7. Übungsblatt

Aufgabe 27

Wir betrachten nochmals die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 26. Diese war gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe 28

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \vec{f}(x,y,z) = \big(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\ x^2e^y + \sin x\big)$

b) $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{f}(x,y) = \big(ye^x + x\sinh y,\ y^4 + 3x^2\sin y,\ 4y - x^3\big)$

c) $f\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(w,x,y,z) = x^y$

Aufgabe 29

Die Funktionen $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$\vec{f}(x,y) = \big(x^2,\ y^2\big)\,, \qquad \vec{g}(x,y) = \big(\sin(xy),\ e^{x+y}\big)\,, \qquad \vec{h}(x,y) = \big(e^x\cos y,\ \sinh x\big)\,.$$

Berechnen Sie die Ableitungen von $\vec{f}$, $\vec{g}$ und $\vec{h}$, und ermitteln Sie dann mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen $\vec{g} \circ \vec{f}$ und $\vec{h} \circ \vec{g}$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie $\vec{g} \circ \vec{f}$ und $\vec{h} \circ \vec{g}$ explizit angeben und ableiten.

Aufgabe 30

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xe^z - y^2$, um den Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (1,-1,0)$.

b) Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, um den Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (0,0)$.

Aufgabe 31

Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante $\det J_{\vec{f}}$ der folgenden Transformation (Zylinderkoordinatenabbildung)

$$\vec{f}\colon (0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \vec{f}(r,\phi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}\,.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 32

a) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangentialebene der Fläche

$$x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$$

im Punkt $(x, y, z) = (1, 2, -1)$.

b) Zeigen Sie, dass die durch

$$x^2 - 2yz + y^3 = 4$$

definierte Fläche im Schnittpunkt $(1, -1, 2)$ zu jeder der Flächen

$$x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2 \quad (a \in \mathbb{R})$$

orthogonal ist. *Hinweis*: Zwei Flächen sind in einem Punkt genau dann zueinander orthogonal, wenn ihre Normalenvektoren in diesem Punkt senkrecht aufeinander stehen.

— bitte wenden —