Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
29.05.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

7. Übungsblatt

Aufgabe 27

In der Lösung zur Aufgabe 26 wurde gezeigt, dass $D_{\vec{v}}f(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v}$ genau dann gilt, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$.
Also: nicht für alle Richtungen $\vec{v}$ gilt die Gleichung $D_{\vec{v}}f(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v}$. Folglich kann die Funktion f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste diese Gleichung für alle Richtungen $\vec{v}$ gelten.
Da die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell differenzierbar, also auch differenzierbar und für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$f'(x,y) = \big(\nabla f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}-4xy^3 & -x^4+4x^2y^2+y^4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(1,2)}.$$

Aufgabe 28

a) Sei $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{f}(x,y,z) = \left(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\ x^2e^y + \sin x\right) =: (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$.

Da alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von $\vec{f}$

$$\begin{aligned}
D_1f_1(x,y,z) &= y^2z^3e^{xy^2z^3} + xy^2z^3e^{xy^2z^3}y^2z^3 = y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
D_2f_1(x,y,z) &= 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
D_3f_1(x,y,z) &= 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
D_1f_2(x,y,z) &= 2xe^y + \cos x,\\
D_2f_2(x,y,z) &= x^2e^y,\\
D_3f_2(x,y,z) &= 0
\end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^3$ stetig sind, ist $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^3$ differenzierbar. Für die Ableitung von $\vec{f}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{f}\,'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} D_1f_1(x,y,z) & D_2f_1(x,y,z) & D_3f_1(x,y,z)\\ D_1f_2(x,y,z) & D_2f_2(x,y,z) & D_3f_2(x,y,z)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3}\\ 2xe^y+\cos x & x^2e^y & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Auch hier sind alle partiellen Ableitungen von $\vec{f}$ stetig, so dass $\vec{f}$ differenzierbar ist mit

$$\vec{f}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x + \sinh y & e^x + x\cosh y\\ 6x\sin y & 4y^3 + 3x^2\cos y\\ -3x^2 & 4\end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

— bitte wenden —

c) Aufgrund von $x^y = e^{y \ln x}$ gilt $D_2 f(w,x,y,z) = e^{y\ln x} y/x$, $D_3 f(w,x,y,z) = e^{y \ln x} \ln x$ und $D_1 f(w,x,y,z) = D_4 f(w,x,y,z) = 0$. Also sind sämtliche partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ stetig, woraus die Differenzierbarkeit von f auf $\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ folgt. Für $(w,x,y,z) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} f'(w,x,y,z) &= \begin{pmatrix} D_1 f(w,x,y,z) & D_2 f(w,x,y,z) & D_3 f(w,x,y,z) & D_4 f(w,x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 29

Offensichtlich besitzen alle drei Funktionen stetige partielle Ableitungen und sind damit differenzierbar. Für $\vec{f}$ mit den Komponentenfunktionen $f_1(x,y) := x^2$ und $f_2(x,y) := y^2$ gilt daher

$$\vec{f}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x,y) & D_2 f_1(x,y) \\ D_1 f_2(x,y) & D_2 f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

und ebenso ergibt sich

$$\vec{g}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{h}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ \cosh x & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel kommen wir dann auf

$$\begin{aligned} (\vec{g}\circ\vec{f}\,)'(x,y) = \vec{g}\,'\big(\vec{f}(x,y)\big)\,\vec{f}\,'(x,y) &= \begin{pmatrix} y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Ableitung der Funktion $\vec{h}\circ\vec{g}$ im Punkt $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ erhält man

$$\begin{aligned} (\vec{h}\circ\vec{g}\,)'(x,y) &= \vec{h}\,'\big(\vec{g}(x,y)\big)\,\vec{g}\,'(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & -e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ \cosh(\sin(xy)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und Ausmultiplizieren liefert für $(\vec{h}\circ\vec{g}\,)'(x,y)$ die $(2,2)$-Matrix

$$= \begin{pmatrix} \big(y\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} & \big(x\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\vec{g}\circ\vec{f}(x,y) = \vec{g}(\vec{f}(x,y)) = \vec{g}(x^2,y^2) = \big(\sin(x^2y^2),\ e^{x^2+y^2}\big) =: (u_1(x,y), u_2(x,y))$$

erhalten wir

$$(\vec{g}\circ\vec{f}\,)'(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 u_1(x,y) & D_2 u_1(x,y) \\ D_1 u_2(x,y) & D_2 u_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$\vec{h}\circ\vec{g}(x,y) = \vec{h}(\vec{g}(x,y)) = \vec{h}\big(\sin(xy),\ e^{x+y}\big) = \big(e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}), \sinh(\sin(xy))\big) =: (v_1(x,y), v_2(x,y))$$

und für die Ableitung ergibt sich

$$(\vec{h}\circ\vec{g}\,)'(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 v_1(x,y) & D_2 v_1(x,y) \\ D_1 v_2(x,y) & D_2 v_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \big(y\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} & \big(x\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 30

a) Das Taylorpolynom von f zweiten Grades um den Punkt $\vec{x}_0$ ist gegeben durch

$$T_2(f, \vec{x}_0)(\vec{x}\,) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \tfrac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T H_f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)\,.$$

Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = xe^z - y^2$, ergibt sich

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^z \\ -2y \\ xe^z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^z \\ 0 & -2 & 0 \\ e^z & 0 & xe^z \end{pmatrix}.$$

Für $\vec{x}_0 := (x_0, y_0, z_0) := (1, -1, 0)$ gilt also

$$f(\vec{x}_0) = 0\,, \qquad \nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} T_2(f, \vec{x}_0)(x,y,z) &= 0 + (x - x_0) + 2(y - y_0) + (z - z_0) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\big(-2(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + 2(x-x_0)(z-z_0)\big) \\ &= (x-1) + 2(y+1) + z - (y+1)^2 + \tfrac{1}{2}z^2 + (x-1)z\,. \end{aligned}$$

b) Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, gilt

$$\begin{array}{lllrcr}
f(x,y) & = e^{x-y}\cos x \sin y & \Rightarrow & f(0,0) & = & 0 \\
f_x(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \sin y - \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_x(0,0) & = & 0 \\
f_y(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \cos y - \cos x \sin y) & \Rightarrow & f_y(0,0) & = & 1 \\
f_{xx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xx}(0,0) & = & 0 \\
f_{xy}(x,y) & = e^{x-y}(\sin x \sin y - \sin x \cos y - \cos x \sin y + \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xy}(0,0) & = & 1 \\
f_{yy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yy}(0,0) & = & -2 \\
f_{xxx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x \sin y - 2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxx}(0,0) & = & 0 \\
f_{xxy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x \cos y + 2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxy}(0,0) & = & 0 \\
f_{xyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\sin x \cos y - 2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xyy}(0,0) & = & -2 \\
f_{yyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\cos x \sin y + 2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yyy}(0,0) & = & 2
\end{array}$$

Damit ist für $\vec{x} = (x,y)$

$$\begin{aligned} T_3(f,(0,0))(\vec{x}) &= \sum_{j=0}^{3} \frac{1}{j!}\,(\vec{x}\cdot\nabla)^j f(0,0) = \sum_{j=0}^{3} \sum_{j_1+j_2=j} \frac{1}{j_1!\,j_2!}\,x^{j_1}y^{j_2}D_1^{j_1}D_2^{j_2}f(0,0) \\
&= f(0,0) + \sum_{j_1+j_2=1} \frac{1}{j_1!\,j_2!}\,x^{j_1}y^{j_2}D_1^{j_1}D_2^{j_2}f(0,0) + \sum_{j_1+j_2=2} \frac{1}{j_1!\,j_2!}\,x^{j_1}y^{j_2}D_1^{j_1}D_2^{j_2}f(0,0) \\
&\qquad + \sum_{j_1+j_2=3} \frac{1}{j_1!\,j_2!}\,x^{j_1}y^{j_2}D_1^{j_1}D_2^{j_2}f(0,0) \\
&= 0 + \big(y + 0\big) + \big(\tfrac{1}{2!}\,y^2\cdot(-2) + xy\cdot 1 + 0\big) + \big(\tfrac{1}{3!}\,y^3\cdot 2 + \tfrac{1}{2!}\,xy^2\cdot(-2) + 0 + 0\big) \\
&= y + xy - xy^2 - y^2 + \tfrac{1}{3}\,y^3\,. \end{aligned}$$

— bitte wenden —

Aufgabe 31

Da die Jakobimatrix von $\vec{f}$, deren Komponentenfunktionen wir mit f_1, f_2, f_3 bezeichnen, an der Stelle $(r, \phi, z) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

$$J_{\vec{f}}(r,\phi,z) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(r,\phi,z) & D_2 f_1(r,\phi,z) & D_3 f_1(r,\phi,z) \\ D_1 f_2(r,\phi,z) & D_2 f_2(r,\phi,z) & D_3 f_2(r,\phi,z) \\ D_1 f_3(r,\phi,z) & D_2 f_3(r,\phi,z) & D_3 f_3(r,\phi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lautet, erhält man $\det(J_{\vec{f}}(r,\phi,z)) =_{[\text{Entw. } S3]} 1 \cdot \det \left(\begin{smallmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{smallmatrix}\right) = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r.$

Bemerkung: Die Funktion $\vec{f}$ bildet die Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) eines Punktes im $\mathbb{R}^3$ auf seine kartesischen Koordinaten ab.

Aufgabe 32

a) Die Gleichung der Fläche ist durch $F(x,y,z) = 0$ gegeben, wobei

$$F(x,y,z) = x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z.$$

Zunächst berechnen wir den Gradienten von F:

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xyz - 2z^2 \\ x^2z + 6y \\ x^2y - 4xz + 8 \end{pmatrix}$$

Laut Vorlesung ist eine Normale im Punkt $(1, 2, -1)$ gegeben durch

$$\nabla F(1,2,-1) = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Eine Gleichung für die Tangentialebene ist daher durch $(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \nabla F(1,2,-1) = 0$ gegeben. Einsetzen von $\vec{r_0} = (1, 2, -1)$ liefert

$$6x - 11y - 14z + 2 = 0.$$

b) Die beiden Flächen sind durch die Gleichungen $F = G_a = 0$ gegeben, wobei

$$F(x,y,z) = x^2 - 2yz + y^3 - 4, \quad G_a(x,y,z) = x^2 + 1 - (2-4a)y^2 - az^2.$$

Wiederum berechnen wir die Gradienten:

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 - 2z \\ -2y \end{pmatrix}, \nabla G_a(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2(2-4a)y \\ -2az \end{pmatrix}$$

Die Normalen der beiden Flächen in $(1, -1, 2)$ sind also durch

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2(2-4a) \\ -4a \end{pmatrix}$$

gegeben. Das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren ist $2 \cdot 2 - 2(2-4a) - 2 \cdot 4a = 0$, also stehen die Normalenvektoren für jeden Wert $a \in \mathbb{R}$ senkrecht aufeinander.