Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
6.06.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

8. Übungsblatt

Aufgabe 27

Offenbar gilt jeweils $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, denn die Funktionen sind beliebig oft partiell differenzierbar. Man erhält also alle Kandidaten für lokale Extremstellen durch Nullsetzen des Gradienten und kann sie dann mit Hilfe der Hessematrix genauer untersuchen.

a) Es gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (y+1, x-2) \overset{!}{=} (0,0)$ genau dann, wenn $(x,y) = (2,-1)$ ist. Somit ist $(2,-1)$ der einzige stationäre Punkt von f. Wegen $\det H_f(2,-1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$ ist die Hesse-Matrix $H_f(2,-1)$ indefinit, so dass f in $(2,-1)$ einen Sattelpunkt besitzt.

b) Der Gradient von f lautet $\operatorname{grad} f(x,y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2)$. Die erste Komponente ist $= 0$ genau dann, wenn $y = 2x^2$ ist. In diesem Fall ergibt sich für die zweite Komponente $-3x + 24x^4 = 3x(8x^3 - 1)$. Die stationären Punkte sind also $(0,0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$.

Da $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte -3 und 3 besitzt, ist $H_f(0,0)$ indefinit. (Alternative Begründung: $\det H_f(0,0) = -9 < 0$.) Deshalb ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Da $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 3 und 9 besitzt, ist $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ positiv definit. (Alternativ mit Satz 2, Kap. 25: $6 > 0$ und $\det H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 27 > 0$.) Somit hat f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

c) Bei dieser Funktion gilt für die partiellen Ableitungen

$$f_x(x,y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)} = (2x - 2x^3 - 4xy^2)e^{-(x^2+y^2)},$$
$$f_y(x,y) = 4ye^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)} = (4y - 2x^2y - 4y^3)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Damit ergibt sich die Äquivalenzenkette

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff 2x - 2x^3 - 4xy^2 = 0 \quad \text{und} \quad 4y - 2x^2y - 4y^3 = 0 \\
&\iff (x = 0 \;\text{ oder }\; 1 - x^2 - 2y^2 = 0) \quad \text{und} \quad (y = 0 \;\text{ oder }\; 2 - x^2 - 2y^2 = 0) \\
&\iff (x = y = 0) \quad \text{oder} \quad (x = 0 \text{ und } 2 - 2y^2 = 0) \quad \text{oder} \quad (1 - x^2 = 0 \text{ und } y = 0).
\end{aligned}$$

Als Stellen lokaler Extrema kommen also die Punkte $(0,0)$, $(0,\pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$ in Frage.

Der Nullpunkt ist sehr einfach zu untersuchen: Wegen $f(0,0) = 0 < f(x,y)$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$ hat f in $(0,0)$ ein globales Minimum.

Für die anderen Punkte bestimmen wir dagegen die Hessematrix; es gilt

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-(x^2+y^2)} - 2xf_x(x,y)\,, \\
f_{yy}(x,y) &= (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-(x^2+y^2)} - 2yf_y(x,y)\,, \\
f_{xy}(x,y) &= -8xye^{-(x^2+y^2)} - 2yf_x(x,y) = f_{yx}(x,y) = -4xye^{-(x^2+y^2)} - 2xf_y(x,y)\,.
\end{aligned}$$

Da an den stationären Stellen f_x und f_y verschwinden, erhalten wir

$$H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,\pm 1) & f_{xy}(0,\pm 1) \\ f_{yx}(0,\pm 1) & f_{yy}(0,\pm 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8e^{-1} \end{pmatrix}\,.$$

Wegen $-2e^{-1} < 0$ und $\det H_f(0,\pm 1) = 16e^{-2} > 0$ ist diese Matrix negativ definit, daher hat f in den Punkten $(0,\pm 1)$ lokale Maxima; der Wert ist jeweils $f(0,\pm 1) = 2e^{-1}$.

Noch zwei stationäre Stellen sind zu untersuchen: Es gilt

$$H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}\,,$$

und wegen $\det H_f(\pm 1, 0) = -8e^{-1} < 0$ ist diese $(2,2)$-Matrix indefinit. In den beiden Punkten $(\pm 1, 0)$ hat f folglich keine Extrema, sondern Sattelpunkte.

Aufgabe 28

Es seien
$$f(x,y) = x^2 + y^2, g(x,y) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225.$$
Es ist nun das Minimum von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ zu bestimmen.
Offensichtlich gilt $f, g \in C^1$. Wir dürfen ohne Beweis annehmen, dass ein Punkt $(x_0, y_0) \in H$ existiert, an welchem das gesuchte Minimum angenommen wird. Falls $g'(x_0, y_0)$ vollen Rang hat, existiert der Multiplikatorenregel von Lagrange zufolge ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Zuerst die Rangbedingung nachprüfen:

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 8y & 8x + 14y \end{pmatrix}$$

Wir müssen untersuchen, für welche (x,y) die einzeilige Matrix $g'(x,y)$ nicht den vollen Rang (also 1) hat. Das ist gleichbedeutend, damit dass die beiden Einträge der Matrix simultan verschwinden (Nullzeile).
Das lineare Gleichungssystem $2x + 8y = 0, 8x + 14y = 0$ besitzt zunächst einmal $(0,0)$ als Lösung; eine kurze Berechnung der Determinante zeigt, dass $(0,0)$ auch die einzige Lösung ist. Also gilt $\operatorname{Rang} g'(x,y) = 0$ genau dann, wenn $(x,y) = (0,0)$. $(0,0)$ ist aber kein Punkt der Nebenbedingungsmenge H, denn $g(0,0) = -225 \neq 0$.
Laut Multiplikatorensatz existiert also ein λ mit $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$. Wir betrachten daher die Gleichung $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ zusammen mit der Nebenbedingung:

$$\begin{aligned}
2x &= \lambda(2x + 8y) && (1) \\
2y &= \lambda(8x + 14y) && (2) \\
225 &= x^2 + 8xy + 7y^2 && (3)
\end{aligned}$$

— bitte wenden —

Wäre $\lambda = 0$, so folgte aus (1), (2) $x = 0, y = 0$. Dann ist aber (3) nicht erfüllt. Also $\lambda \neq 0$. Man kann nun die Gleichung durch sukzessives Einsetzen lösen. Da (1) und (2) linear in x, y sind kann man, um etwas schneller ans Ziel zu gelangen, folgenden Trick anwenden: kurze Umformung (beachte $\lambda \neq 0$) von (1), (2) zeigt, dass

$$\begin{aligned} (\lambda^{-1} - 1)x - 4y &= 0 \\ -4x + (\lambda^{-1} - 7)y &= 0 \end{aligned}$$

eine Lösung $(x, y) \neq 0$ besitzt und somit muss die Determinate der Gleichungssystems 0 sein. Das liefert

$$\lambda^{-2} - 8\lambda^{-1} - 9 = 0,$$

also $\lambda^{-1} = -1$ oder $\lambda^{-1} = 9$.
Fall 1: $\lambda^{-1} = -1$. Aus (1), (2) folgt $x = -2y$. In (3) eingesetzt, liefert dies $-5y^2 = 225$, welches keine reelle Lösung $y \in \mathbb{R}$ besitzt.
Fall 2: $\lambda^{-1} = 9$. Aus (1), (2) folgt $y = 2x$. Einsetzen in (3) ergibt $45x^2 = 255$. Dann ist $x^2 = 5, y^2 = 4x^2 = 20$.
Die Gleichung $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ hat uns also $x^2 = 5, y^2 = 20$ geliefert; kombiniert mit der Aussage der Multiplikatorensatzes ist also $x_0^2 = 5, y_0^2 = 20$, d.h. das gesuchte Minimum ist

$$\sqrt{\min\{x^2 + y^2 : (x, y) \in H\}} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Aufgabe 29

Da die Menge S beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert. Definiere

$$\vec{g}(x, y, z) := \begin{pmatrix} g_1(x, y, z) \\ g_2(x, y, z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{g}(x, y, z) = (0, 0)\}$. Zur Bestimmung der globalen Extrema von f auf S verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen: Sowohl f als auch $\vec{g}$ sind auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Wegen

$$\vec{g}\,'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

gilt $\operatorname{rang} \vec{g}\,'(x, y, z) < 2$ genau für $x = y = z$; solche Punkte können jedoch die Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) = 0$ und $g_2(x, y, z) = 0$ nicht erfüllen, denn aus $x + y + z = 0$ folgte dann $x = y = z = 0$ im Widerspruch zu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Also erhalten wir sämtliche Kandidaten für Extremstellen durch Anwenden der Multiplikatorenregel von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &:= f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z) \\ &= 5x + y - 3z + \lambda_1(x + y + z) + \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \vec{0}$, also die fünf Gleichungen

$$5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0\,, \qquad 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0\,, \qquad -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0\,,$$
$$x + y + z = 0\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\,.$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x + y + z) = 0\,,$$

— bitte wenden —

wegen $x+y+z=0$ also $\lambda_1=-1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4+2\lambda_2 x=0$, was insbesondere $\lambda_2\neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y=0$, woraus mit $\lambda_2\neq 0$ sofort $y=0$ folgt. Aus $x+y+z=0$ ergibt sich dann $z=-x$ und in $x^2+y^2+z^2=1$ eingesetzt folgt $2x^2=1$, d.h. $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2},0,-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2},0,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Die Funktionswerte dort sind $f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},0,-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}$ bzw. $f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},0,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=-4\sqrt{2}$. Folglich besitzt f auf der Menge S das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.

Aufgabe 30

a) Der Umkehrsatz liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Funktion $\vec{g}$ ist stetig differenzierbar, es gilt $\vec{g}(\ln 2,\frac{\pi}{2})=(0,\frac{3}{4})$ und die Matrix $\vec{g}\,'(\ln 2,\frac{\pi}{2})$ ist regulär. Wir überprüfen diese Voraussetzungen: Die stetige Differenzierbarkeit ist offensichtlich. Weiter ist

$$\vec{g}(\ln 2,\tfrac{\pi}{2})=\begin{pmatrix}\cosh(\ln 2)\,\cos\frac{\pi}{2}\\ \sinh(\ln 2)\,\sin\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \sinh(\ln 2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 3/4\end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\ln 2)=\frac{1}{2}(e^{\ln 2}-e^{-\ln 2})=\frac{1}{2}(2-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$. Schließlich gilt

$$\vec{g}\,'(x,y)=\begin{pmatrix}\sinh x\,\cos y & -\cosh x\,\sin y\\ \cosh x\,\sin y & \sinh x\,\cos y\end{pmatrix},$$

und damit ist

$$\vec{g}\,'(\ln 2,\tfrac{\pi}{2})=\begin{pmatrix}0 & -\cosh(\ln 2)\\ \cosh(\ln 2) & 0\end{pmatrix}$$

regulär, denn $\cosh(\ln 2)=\frac{1}{2}(2+\frac{1}{2})=\frac{5}{4}\neq 0$.

Nach dem Umkehrsatz gilt

$$\left(\vec{g}^{\,-1}\right)'(0,\tfrac{3}{4})=\left(\vec{g}\,'(\vec{g}^{\,-1}(0,\tfrac{3}{4}))\right)^{-1}=\left(\vec{g}\,'(\ln 2,\tfrac{\pi}{2})\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -5/4\\ 5/4 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 4/5\\ -4/5 & 0\end{pmatrix}.$$

b) Die Funktion $\vec{g}$ ist überall stetig differenzierbar und für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ist

$$\det\vec{g}\,'(x,y)=(\sinh x\,\cos y)^2+(\cosh x\,\sin y)^2.$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn $\sinh x\,\cos y=0$ und $\cosh x\,\sin y=0$ gilt. Für $x>0$ ist dies gleichbedeutend mit $\cos y=0$ und $\sin y=0$, kann also nie eintreten. Folglich ist für $x>0$ die Matrix $\vec{g}\,'(x,y)$ stets regulär. Der Umkehrsatz liefert nun die lokale Invertierbarkeit von $\vec{g}$ in jedem Punkt $(x,y)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$.

Trotzdem ist die Funktion $\vec{g}$ auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ nicht injektiv wegen $\vec{g}(x,y+2\pi)=\vec{g}(x,y)$ für $(x,y)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$.

Aufgabe 31

a) Die behauptete Auflösbarkeit folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn wir

$$f(0,0,-2)=0 \qquad \text{und} \qquad \partial_z f\,(0,0,-2)\neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z):=z^3+2z^2-3xyz+x^3-y^3$, überprüft haben. Es gilt $f(0,0,-2)=(-2)^3+2(-2)^2=0$ und

$$\partial_z f\,(x,y,z)=3z^2+4z-3xy\,, \qquad \text{also} \qquad \partial_z f\,(0,0,-2)=3(-2)^2+4(-2)=4\neq 0\,,$$

— bitte wenden —

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\Big(\partial_z f\big(x,y,g(x,y)\big)\Big)^{-1} \partial_{(x,y)} f\big(x,y,g(x,y)\big) \\ &= -\frac{1}{3g(x,y)^2 + 4g(x,y) - 3xy} \begin{pmatrix} -3yg(x,y) + 3x^2 & -3xg(x,y) - 3y^2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

b) Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von $(0,0,1,1)$ durch die Gleichung

$$\vec{f}(x,y,u,v) = \vec{0}\,, \qquad \text{mit} \quad \vec{f}(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen u und v definiert werden. Offenbar ist $\vec{f}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass $\vec{f}(0,0,1,1) = \vec{0}$ gilt; die ersten zwei Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix $\partial_{(u,v)}\vec{f}\,(0,0,1,1)$ regulär ist. Wegen

$$\vec{f}\,'(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad \partial_{(u,v)}\vec{f}\,(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

und damit $\partial_{(u,v)}\vec{f}\,(0,0,1,1) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrix ist tatsächlich regulär, denn $\det\left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right) = -4 \neq 0$.

Somit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen erfüllt. Danach gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\vec{g}\colon U \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{g}(0,0) = (1,1)$ und $\vec{f}(x,y,\vec{g}(x,y)) = \vec{0}$ für alle $(x,y) \in U$. Definiert man u als die erste Komponentenfunktion von $\vec{g}$ und v als die zweite Komponentenfunktion von $\vec{g}$, dann leisten $u,v\colon U \to \mathbb{R}$ das Gewünschte. Außerdem ergibt für sich für $(x,y) \in U$

$$\begin{aligned} \vec{g}\,'(x,y) &= -\big(\partial_{(u,v)}\vec{f}(x,y,\vec{g}(x,y))\big)^{-1}\, \partial_{(x,y)}\vec{f}(x,y,\vec{g}(x,y)) \\ &= -\big(\partial_{(u,v)}\vec{f}(x,y,u(x,y),v(x,y))\big)^{-1}\, \partial_{(x,y)}\vec{f}(x,y,u(x,y),v(x,y)) \\ &= -\begin{pmatrix} -2u(x,y) & 2v(x,y) \\ -6u(x,y) & 8v(x,y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Insbesondere für $(x,y) = (0,0)$ ist der zweite Faktor die Nullmatrix, so dass dann

$$\vec{g}\,'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Dies bedeutet, dass $u_x(0,0) = u_y(0,0) = v_x(0,0) = v_y(0,0)$ gilt.

Dieses Ergebnis kann man auch folgendermaßen herleiten: Bilden wir in den beiden Gleichungen $x^2+y^2-u^2+v^2 = 0$ und $x^2+2y^2-3u^2+4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach x, wobei wir $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ jetzt als die implizit definierten Funktionen auffassen, so ergibt sich

$$2x - 2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x - 6uu_x + 8vv_x = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_x(0,0) + 2v_x(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_x(0,0) + 8v_x(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_x(0,0) = v_x(0,0) = 0$.

— bitte wenden —

Um die partiellen Ableitungen nach y der implizit definierten Funktionen $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ zu berechnen, gehen wir analog wie eben vor. Wir bilden in beiden Gleichungen $x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0$ und $x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach y und erhalten

$$2y - 2uu_y + 2vv_y = 0 \qquad \text{und} \qquad 4y - 6uu_y + 8vv_y = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_y(0, 0) + 2v_y(0, 0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_y(0, 0) + 8v_y(0, 0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_y(0, 0) = v_y(0, 0) = 0$.