Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
18.06.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

10. Übungsblatt

Aufgabe 44

Es seien

$$G := \{(x, y) : x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1\},$$
$$\vec{v} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Ferner sei B_ϱ die Kugel um $\vec{0}$ mit Radius $\varrho > 0$. Berechnen Sie

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{G \setminus B_\varrho} \nabla \cdot \vec{v}\ d(x, y), \quad \lim_{\varrho \to 0} \int_{\partial G \setminus B_\varrho} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Hierbei sei unter dem Integral über $\partial G \setminus B_\varrho$ das Kurvenintegral über

$$\{(x, 0) : \varrho \leqslant x \leqslant 1\} \cup \{(x, y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, y) : \varrho \leqslant y \leqslant 1\}$$

zu verstehen. Was bedeutet dieses Ergebnis im Hinblick auf die Gültigkeit des Divergenzsatzes ?

Aufgabe 45

Sei $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leqslant 3\}$ und $\vec{w}$ eine positiv orientierte Parametrisierung von ∂U. Für $(u, v) \in U$ definiere $\vec{r}(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$ und betrachte die Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{\vec{r}(u, v) \mid (u, v) \in U\right\},$$

deren Rand $\partial\mathcal{F} = \vec{r}(\partial U)$ durch $\vec{r} \circ \vec{w}$ parametrisiert sei. Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z - 5y \\ 9x - 3z \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes.

Aufgabe 46

Die Oberfläche von $Z := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$ wird mit $\mathcal{F}$ bezeichnet und es sei

$$\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix}.$$

— bitte Hinweise auf Seite 3 beachten —

Berechnen Sie

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do\,,$$

wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Zylinders Z weist, auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) mittels der Definition des Oberflächenintegrals;

b) unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 47

Gegeben seien der Kegel $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant 2 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ sowie das Vektorfeld $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(x,y,z) = (z, y, z+1)$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche des Kegels K nach außen.

Aufgabe 48

a) Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\,,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\big\}\,.$$

b) Die beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ sei durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + 2z = 1$ begrenzt. Berechnen Sie das Integral $\iiint\limits_B \sin z\, d(x,y,z)$.

Aufgabe 49

a) Sei $0 < r < R$. Berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_B \frac{y}{x}\, d(x,y)\,, \qquad B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \in [r,R],\ |y| \leqslant x\big\}\,.$$

b) Berechnen Sie für die Menge

$$B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant 1\,, x^2 + y^2 \leqslant (1-z)^2\big\}$$

das Integral

$$\iiint\limits_B (x^2+y^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, d(x,y,z)\,.$$

c) Sei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\| \leqslant 2\}$. Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\varrho(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2} & \text{für } 0 \leqslant \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant 1\,, \\ 0 & \text{für } 1 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant 2\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse

$$\iiint\limits_B \varrho(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$$

— bitte Hinweise auf Seite 3 beachten —

Übungsklausur Zur Teilnahme an der Übungsklausur am Samstag, den 06.07.2013, von 08:00 bis 10:00 Uhr ist keine Anmeldung erforderlich. Hörsaalverteilung der Übungsklausur:

Fachrichtung	Hörsaal
Namen L-Z	Benz-Hörsaal
Namen A-K	Daimler-Hörsaal

Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

— bitte Hinweise auf Seite 3 beachten —