Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
18.06.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

10. Übungsblatt

Aufgabe 44

Zunächst einmal berechnen wir die Divergenz von $\vec{v}$: in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ gilt

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

und somit nach Quotientenregel

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}) &= D_x \frac{-y}{x^2+y^2} + D_y \frac{x}{x^2+y^2} \\ &= \frac{0 + y\ 2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{0 - x\ 2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort, dass $\int_{G\setminus B_\varrho} \nabla \cdot \vec{v}\ d(x,y) = 0$ für jedes kleine $\varrho > 0$ gilt, d.h.

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{G\setminus B_\varrho} \nabla \cdot \vec{v}\ d(x,y) = 0.$$

Zur Berechnung des Randintegrals schreiben wir

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 := \{(x,0) : \varrho \leqslant x \leqslant 1\} \cup \{(x,y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 = 1\} \cup \{(0,y) : \varrho \leqslant y \leqslant 1\}$$

und parametrisieren für $\varrho < 1$ wie folgt die Stücke $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &: [\varrho, 1] \to \mathbb{R}^2, & \vec{r}_1(t) &= (t, 0) \\ \vec{r}_2 &: [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2, & \vec{r}_2(t) &= (\cos t, \sin t) \\ \vec{r}_3 &: [0, 1-\varrho] \to \mathbb{R}^2, & \vec{r}_3(t) &= (0, 1-t). \end{aligned}$$

Also

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_\varrho^1 \vec{v} \cdot \vec{e}_1\ dt = \int_\varrho^1 0\ dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + \sin^2 t)^{-1} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\ dt = \pi/2$$

$$\int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\int_0^{1-\varrho} \vec{v} \cdot \vec{e}_2\ dt = -\int_0^{1-\varrho} 0\ dt = 0$$

und somit

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\partial G \setminus B_\varrho} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \pi/2.$$

— bitte wenden —

Interpretation: die beiden Integrale $\int_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}$, $\int_G \nabla \cdot \vec{v} d(x,y)$ existieren im uneigentlichen Sinne ($\varrho \to 0$), aber die Gleichheit

$$\int_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_G \nabla \cdot \vec{v} d(x,y)$$

gilt *nicht*. Die Voraussetzung für den Divergenzssatz in $\mathbb{R}^2$ können also nicht dahingehend abgeschwächt werden, dass man $\vec{v} \in C^1(G)$ zulässt und evtl. uneigentliche Integrale benutzt. Man beachte, dass in der Vorlesung $\vec{v} \in C^1(\tilde{G})$ gefordert wurde, wobei $\tilde{G}$ ein Gebiet war, dass G inklusive Rand umfasst.

Aufgabe 45

Die Fläche $\mathcal{F}$ liegt in Parameterdarstellung vor mit

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 - u^2 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in U := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leqslant 3\}.$$

Der Stokessche Integralsatz liefert

$$\int_{\partial \mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o} = \iint\limits_{U} (\nabla \times \vec{v})\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \big(D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\big)\, d(u,v).$$

Nun ist

$$D_1\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}, \quad D_2\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2 v_3 - D_3 v_2 \\ D_3 v_1 - D_1 v_3 \\ D_1 v_2 - D_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 1 - (-2) \\ 9 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich

$$\int_{\partial \mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{U} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} d(u,v) = \iint\limits_{U} (8u - 6v + 14)\, d(u,v);$$

und mit Polarkoordinaten (U ist die Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{3}$) erhält man unter Berücksichtigung von $\int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\phi = 0$:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (8r\cos\phi - 6r\sin\phi + 14)\, r\, d\phi\, dr = \int_0^{\sqrt{3}} 28\pi r\, dr \\ &= 28\pi \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_{r=0}^{\sqrt{3}} = 28\pi \cdot \tfrac{3}{2} = 42\pi. \end{aligned}$$

— bitte wenden —

Aufgabe 46

a) Die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Zylinders Z besteht aus drei Teilen, nämlich aus der Bodenfläche $\mathcal{F}_1$, der Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ und der oberen Deckfläche $\mathcal{F}_3$.

Die Bodenfläche $\mathcal{F}_1$ können wir durch die Parametrisierung $\vec{r}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 0)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0,2\pi]$ darstellen. Es gilt

$$D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u\cos^2 v + u\sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $\vec{N} = (0,0,-1)$ als äußere Einheitsnormale. (Man teilt $D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)$ durch die Norm $\|D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\|$ und wählt dann noch das Vorzeichen so, dass der Vektor nach außen weist.) Also ist $\iint_{\mathcal{F}_1} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = 0$, denn

$$\big(\vec{v}(\vec{r}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{r}(u,v))\big) = \begin{pmatrix} u^3\cos^3 v \\ u^3\cos^2 v\,\sin v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Die Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ wird durch $\vec{r}(u,v) := (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u,v) \in U := [0,2\pi] \times [0,1]$ parametrisiert. Wir erhalten

$$D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die äußere Einheitsnormale $\vec{N}$ an $\mathcal{F}_2$. Wegen

$$\big(\vec{v}(\vec{r}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{r}(u,v))\big) = \begin{pmatrix} \cos^3 u \\ \cos^2 u\,\sin u \\ v\cos^2 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \cos^4 u + \cos^2 u\,\sin^2 u = \cos^2 u$$

folgt

$$\iint_{\mathcal{F}_2} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iint_U \cos^2 u\,\underbrace{\|D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\|}_{=\cos^2 u + \sin^2 u = 1}\,d(u,v) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2 u\,dv\,du = \int_0^{2\pi} \cos^2 u\,du = \pi\,.$$

Es bleibt noch die Deckfläche $\mathcal{F}_3$: Die Parametrisierung $\vec{r}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 1)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0,2\pi]$ liefert $D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v) = (0,0,u)$. Es ist $\vec{N} = (0,0,1)$ und damit

$$\big(\vec{v}(\vec{r}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{r}(u,v))\big) = \begin{pmatrix} u^3\cos^3 v \\ u^3\cos^2 v\,\sin v \\ u^2\cos^2 v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u^2\cos^2 v\,.$$

Somit erhalten wir

$$\iint_{\mathcal{F}_3} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iint_U u^2\cos^2 v\,\underbrace{\|D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\|}_{=|u|=u,\text{ da } u \geqslant 0}\,d(u,v) = \int_0^1\int_0^{2\pi} u^3\cos^2 v\,dv\,du$$

$$= \left(\int_0^1 u^3\,du\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2 v\,dv\right) = \tfrac{1}{4}\pi\,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \sum_{k=1}^{3} \iint_{\mathcal{F}_k} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = 0 + \pi + \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{4}\pi\,.$$

— bitte wenden —

b) Nach dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ ist

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iiint_{Z} (\nabla \cdot \vec{v})\, d(x, y, z)\,.$$

Nun gilt $(\nabla \cdot \vec{v})(x, y, z) = D_1(x^3) + D_2(x^2 y) + D_3(x^2 z) = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$ und mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$, wobei $r \in [0, 1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 1]$, folgt

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do &= \iiint_{Z} 5x^2\, d(x, y, z) = \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]} 5(r\cos\phi)^2\, r\, d(r, \phi, z) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 5r^3 \cos^2\phi\, dz\, d\phi\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 5r^3 \cos^2\phi\, d\phi\, dr \\
&= 5\left(\int_0^1 r^3\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi\right) = \tfrac{5}{4}\pi\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 47

$\vec{N}$ sei stets die Einheitsnormale auf ∂K, die ins Äußere von K gerichtet ist. Für den Fluß des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen gilt

$$\iint_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do.$$

Die Oberfläche ∂K besteht aus dem Kegelmantel und dem Grundkreis. Wir parametrisieren zunächst den Kegelmantel

$$M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\ z \geqslant 0\right\}$$

durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 2 - r \end{pmatrix} =: \vec{g}(r, \phi) \qquad \text{mit } (r, \phi) \in [0, 2] \times [0, 2\pi].$$

Dann ist

$$D_1\vec{g}(r, \phi) \times D_2\vec{g}(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach außen. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\vec{f}(\vec{g}(r, \phi)) \cdot \left(D_1\vec{g}(r, \phi) \times D_2\vec{g}(r, \phi)\right) &= \begin{pmatrix} 2 - r \\ r\sin\phi \\ 3 - r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ r \end{pmatrix} = (2 - r)r\cos\phi + r^2\sin^2\phi + (3 - r)r \\
&= (2r - r^2)\cos\phi + r^2\sin^2\phi + (3r - r^2).
\end{aligned}$$

Für den Fluß von $\vec f$ durch die Mantelfläche M nach außen erhält man

$$\begin{aligned}\iint\limits_M \vec f\cdot\vec N\,do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec f(\vec g(r,\phi))\cdot\frac{D_1\vec g(r,\phi)\times D_2\vec g(r,\phi)}{\|D_1\vec g(r,\phi)\times D_2\vec g(r,\phi)\|}\,\|D_1\vec g(r,\phi)\times D_2\vec g(r,\phi)\|\,d(r,\phi)\\
&= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec f(\vec g(r,\phi))\cdot\big(D_1\vec g(r,\phi)\times D_2\vec g(r,\phi)\big)\,d(r,\phi)\\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi}\big((2r-r^2)\cos\phi+r^2\sin^2\phi+(3r-r^2)\big)\,d\phi\,dr\\
&= \int_0^2\big(\pi r^2+(3r-r^2)2\pi\big)\,dr=\Big[\pi\,\frac{r^3}{3}+\Big(\frac{3}{2}\,r^2-\frac{r^3}{3}\Big)\,2\pi\Big]_0^2=\frac{28}{3}\,\pi.\end{aligned}$$

Eine Parametrisierung des Grundkreises

$$G:=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2\leqslant 4,\ z=0\big\}$$

ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\phi\\r\sin\phi\\0\end{pmatrix}=:\vec g(r,\phi)\qquad\text{mit }(r,\phi)\in[0,2]\times[0,2\pi].$$

Dann ist

$$D_1\vec g(r,\phi)\times D_2\vec g(r,\phi)=\begin{pmatrix}\cos\phi\\\sin\phi\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\phi\\r\cos\phi\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach innen. Wegen

$$\vec f(\vec g(r,\phi))\cdot\big(-D_1\vec g(r,\phi)\times D_2\vec g(r,\phi)\big)=\begin{pmatrix}0\\r\sin\phi\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-r\end{pmatrix}=-r$$

ergibt sich für den Fluß von $\vec f$ durch die Grundfläche G nach außen

$$\begin{aligned}\iint\limits_G \vec f\cdot\vec N\,do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} f(\vec g(r,\phi))\cdot\big(-D_1\vec g(r,\phi)\times D_2\vec g(r,\phi)\big)\,d(r,\phi)\\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi}-r\,d\phi\,dr=-\int_0^2 2\pi r\,dr=-4\pi.\end{aligned}$$

Der Fluß von $\vec f$ durch die gesamte Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen beträgt somit

$$\iint\limits_{\partial K}\vec f\cdot\vec N\,do=\iint\limits_M\vec f\cdot\vec N\,do+\iint\limits_G\vec f\cdot\vec N\,do=\frac{28}{3}\,\pi-4\pi=\frac{16}{3}\,\pi.$$

Alternativ: Man kann $\iint_{\partial K}\vec f\cdot\vec N\,do$ auch mit dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ berechnen:

$$\iint\limits_{\partial K}\vec f\cdot\vec N\,do=\iiint\limits_K\nabla\cdot\vec f\,d\tau=\iiint\limits_K 2\,d(x,y,z),$$

wobei wir hier $d\tau$ für $d(x,y,z)$ geschrieben und $(\nabla \cdot \vec{f})(x,y,z) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} = 0+1+1=2$ verwendet haben. Mit Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi, \qquad z = z$$

lässt sich K charakterisieren durch

$$r \in [0,2], \qquad \phi \in [0,2\pi], \qquad z \in [0, 2-r],$$

so dass folgt

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= 2 \iiint\limits_{K} d(x,y,z) = 2 \int_0^2 \int_0^{2-r} \int_0^{2\pi} r\, d\phi\, dz\, dr \\ &= 4\pi \int_0^2 \int_0^{2-r} r\, dz\, dr = 4\pi \int_0^2 (2r - r^2)\, dr = 4\pi \big[r^2 - \tfrac{1}{3} r^3\big]_0^2 = \frac{16}{3}\pi.\end{aligned}$$

Aufgabe 48

a) Für $(x,y,z) \in A$ gilt nach Definition der Menge $x \in [1,2]$ sowie $0 \leqslant x^2 - y^2$, also $y^2 \leqslant x^2$, d.h. $|y| \leqslant |x| = x$ wegen $x > 0$. Mit

$$A_0 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,2],\ -x \leqslant y \leqslant x\big\}$$

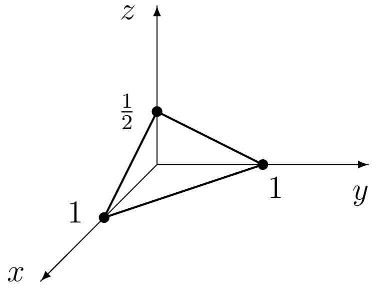
lässt sich A folgendermaßen schreiben

$$A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A_0,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\big\}\,.$$

Da der Integrand $f(x,y,z) = 1$ stetig ist, erhält man nach 42.1

$$\begin{aligned} I(A) &= \iiint\limits_{A} d(x,y,z) = \iint\limits_{A_0} \left(\int_0^{x^2-y^2} dz \right) d(x,y) = \int_1^2 \int_{-x}^{x} \int_0^{x^2-y^2} dz\, dy\, dx \\ &= \int_1^2 \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\, dy\, dx = \int_1^2 \big[x^2 y - \tfrac{1}{3} y^3\big]_{y=-x}^{x} dx = \int_1^2 \tfrac{4}{3} x^3\, dx \\ &= \big[\tfrac{1}{3} x^4\big]_{x=1}^{2} = \tfrac{1}{3}(16-1) = 5\,. \end{aligned}$$

b)



Die Menge B wird von den Koordinatenebenen und von der Ebene durch die drei Punkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,\frac{1}{2})$ begrenzt (siehe Skizze). Damit ist $(x,y,z) \in B$ äquivalent zu

$$0 \leqslant x \leqslant 1\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1-x\,, \quad 0 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}(1-x-y)\,.$$

Bei B handelt es sich also um

$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B_0\,,\ 0 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}(1-x-y) \right\},$$
$$\text{wobei}\quad B_0 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\,,\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x \right\}.$$

Da $(x,y,z) \mapsto \sin z$ auf $\mathbb{R}^3$ stetig ist, ergibt sich für das Integral nach (1) aus 42.1

$$\iiint\limits_B \sin z\, d(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{(1-x-y)/2} \sin z\, dz\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \big[-\cos z\big]_{z=0}^{(1-x-y)/2}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big(-\cos\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + 1\Big)\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 \big[2\sin\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + y\big]_{y=0}^{1-x}\, dx = \int_0^1 \Big(1 - x - 2\sin\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\Big)\, dx$$
$$= \big[x - \tfrac{1}{2}x^2 - 4\cos\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\big]_{x=0}^1 = \big(1 - \tfrac{1}{2} - 4\cos 0\big) + 4\cos(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{7}{2} + 4\cos(\tfrac{1}{2})\,.$$

Aufgabe 49

a) Sei $0 < r < R$. Zur Berechnung von

$$\iint\limits_B \frac{y}{x}\, d(x,y)\,, \qquad B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \in [r,R],\ |y| \leqslant x\big\}$$

führen wir Polarkoordinaten ein:

$$x = \varrho\cos\phi, \quad y = \varrho\sin\phi \quad \text{mit } \varrho \in [r,R],\ \phi \overset{(*)}{\in} [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}].$$

(Hierbei ergibt sich $(*)$ durch die Bedingung $|y| \leqslant x$. Würde man $\phi \in [0, 2\pi]$ fordern, so müsste man $\phi \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{7}{4}\pi, 2\pi]$ wählen und B in $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \in [r,R], 0 \leqslant y \leqslant x\}$ und $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \in [r,R], -x \leqslant y \leqslant 0\}$ zerlegen. Dann ist $\iint_B \frac{y}{x}\, d(x,y) = \iint_{B_1} \frac{y}{x}\, d(x,y) + \iint_{B_2} \frac{y}{x}\, d(x,y)$.) Wir erhalten

$$\iint\limits_B \frac{y}{x}\, d(x,y) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_r^R \frac{\sin\phi}{\cos\phi}\, \varrho\, d\varrho\, d\phi = \tfrac{1}{2}(R^2 - r^2) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan\phi\, d\phi = 0.$$

Das letzte Gleichheitszeichen ergibt sich, weil der Tangens eine ungerade Funktion ist und über ein zu 0 symmetrisches Intervall integriert wird.

b) Wir greifen auf Zylinderkoordinaten zurück:

$$x = r\cos\phi\,, \qquad y = r\sin\phi\,, \qquad z = z\,, \qquad d(x,y,z) = r\, d(r,\phi,z)\,.$$

Für $(x,y,z) \in B$ gilt $0 \leqslant z \leqslant 1$, und die zweite B definierende Ungleichung führt auf die Bedingung $r^2 \leqslant (1-z)^2$. Die Menge B ist also charakterisiert durch

$$0 \leqslant z \leqslant 1\,, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi\,, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1 - z\,.$$

Die Transformationsformel liefert nun

$$\iiint\limits_B (x^2+y^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, d(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} (r^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, r\, dr\, d\phi\, dz$$
$$= 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-z} r^5 e^{2(1-z)^7}\, dr\, dz = 2\pi \int_0^1 \big[\tfrac{1}{6}r^6\big]_{r=0}^{1-z}\, e^{2(1-z)^7}\, dz$$
$$= \int_0^1 \tfrac{1}{3}\pi(1-z)^6\, e^{2(1-z)^7}\, dz = \left[-\frac{\pi e^{2(1-z)^7}}{42}\right]_{z=0}^1 = \frac{\pi(e^2-1)}{42}\,.$$

c) Definiere $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$. Dann müssen wir

$$m := \iiint\limits_B \varrho(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint\limits_K \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z)$$

berechnen. Hierzu benutzen wir Kugelkoordinaten

$$x = r\cos\phi\,\cos\vartheta, \quad y = r\sin\phi\,\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta \qquad \text{mit } r \in [0,1],\ \phi \in [0,2\pi],\ \vartheta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Die Transformationsformel liefert

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+r^2}\, r^2 \cos\vartheta\, d\phi\, d\vartheta\, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{1+r^2}\, \cos\vartheta\, d\vartheta\, dr \\ &= 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\, dr = 4\pi \int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+r^2}\Big)\, dr \\ &= 4\pi\big(1 - [\arctan r]_{r=0}^1\big) = 4\pi\big(1 - (\tfrac{\pi}{4} - 0)\big) = 4\pi - \pi^2. \end{aligned}$$