Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
25.06.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

11. Übungsblatt

Aufgabe 50

Die Funktionen $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mögen den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen genügen. Zeigen Sie: die durch

$$\tilde{u}(r,\phi) = u(r\cos\phi, r\sin\phi), \quad \tilde{v}(r,\phi) = v(r\cos\phi, r\sin\phi)$$

für $(r,\phi) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ definierten Funktionen genügen den *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen in Polarkoordinaten*:

$$\begin{aligned} rD_1\tilde{u}(r,\phi) &= D_2\tilde{v}(r,\phi) \\ D_2\tilde{u}(r,\phi) &= -rD_1\tilde{v}(r,\phi). \end{aligned}$$

Aufgabe 51

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar, wo sind sie holomorph? Bestimmen Sie gegebenenfalls f'.

a) $f(x+iy) = \sin x\, \sin y - i\cos x\, \cos y \quad (x, y \in \mathbb{R})$

b) $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$

c) $f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z}$ (für $z \neq 0$)

Aufgabe 52

Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$u(x,y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2y^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

der Realteil einer holomorphen Funktion? Bestimmen Sie für dieses λ sämtliche holomorphen Funktionen, die u als Realteil haben.

Aufgabe 53

Es sei $G = \left\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < e,\ \frac{1}{4}\pi < \arg z < \frac{3}{4}\pi\right\}$.

a) Begründen Sie, dass das Gebiet G durch eine Logarithmusfunktion schlicht abgebildet werden kann.

b) Bestimmen Sie einen Zweig des Logarithmus, für den $\log(i) = \frac{5}{2}\pi i$ gilt, und geben Sie das Bild von G unter dieser Abbildung an.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von G.

— bitte wenden —

Aufgabe 54

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(1+i)^i\,, \qquad i^{(i^i)}\,, \qquad (\log i)^i\,.$$

Hierbei bezeichnet $\log z$ den Hauptzweig des Logarithmus. Ausdrücke der Form z^α sind mit dem Hauptzweig des Logarithmus definiert.

b) Ermitteln Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^{1/z} = i$.

Aufgabe 55

Betrachten Sie die durch $f(z) = \sin z$ gegebene Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

a) Worauf bildet die Funktion f Geraden ab, die in der komplexen Zahlenebene parallel zu den Achsen liegen?

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x+iy) = \sin x\, \cosh y + i \cos x\, \sinh y$.

b) Für welche $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt $f'(z_0) \neq 0$?

Es sei z_0 ein solcher Punkt. g sei die Parallele zur reellen Achse durch z_0 und h sei die Parallele zur imaginären Achse durch z_0. Somit schneiden sich die Geraden g und h in z_0 im rechten Winkel. Zeigen Sie, dass sich auch die Bilder dieser Geraden im Punkt $f(z_0)$ im rechten Winkel schneiden.

Aufgabe 56

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, d.h. es existiere ein $M > 0$ mit

$$|f(z)| \leqslant M \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Beweisen Sie: f ist konstant. Hierbei dürfen Sie die Darstellung

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}\, d\xi$$

mit $R > 0$ verwenden (siehe Kap. 5 der Vorlesung).

Übungsklausur Zur Teilnahme an der Übungsklausur am Samstag, den 06.07.2013, von 08:00 bis 10:00 Uhr ist keine Anmeldung erforderlich. Hörsaalverteilung der Übungsklausur:

Fachrichtung	Hörsaal
Namen L-Z	Benz-Hörsaal
Namen A-K	Daimler-Hörsaal

Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

— bitte wenden —