Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
3.07.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

12. Übungsblatt

Aufgabe 57

Berechnen Sie den Wert der folgenden Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\oint_{|\zeta|=2} \frac{\zeta^3}{\zeta^2+1}\,d\zeta$

b) $\displaystyle\oint_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta^2+2\zeta}\,d\zeta$

c) $\displaystyle\oint_{|\zeta|=4} \frac{\zeta e^{i\zeta}}{(\zeta-\pi)^3}\,d\zeta$

d) $\displaystyle\oint_{|\zeta-2|=3} \frac{e^{i\cos\zeta}\sin(\zeta^4+1)-\zeta}{(\zeta-7)^{42}}\,d\zeta$

Hinweis: Es gilt $\frac{1}{\zeta^2+1} = \frac{i/2}{\zeta+i} - \frac{i/2}{\zeta-i}$ für $\zeta \notin \{-i, i\}$ und $\frac{1}{\zeta^2+2\zeta} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta+2})$ für $\zeta \notin \{-2, 0\}$.

Aufgabe 58

Die Funktion f ist gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}\,.$$

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von f

a) im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$.

b) um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, die im Punkt $1 + 3i$ konvergiert.

Aufgabe 59

Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten von f sowie die Residuen in diesen Punkten.

a) $\displaystyle f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$

b) $f(z) = ze^{\frac{1}{1-z}}$

Aufgabe 60

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

a) $\displaystyle\oint_{|\zeta|=2} \frac{e^\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+3)^2}\,d\zeta$

b) $\displaystyle\oint_{|\zeta|=9} \frac{e^\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+3)^2}\,d\zeta$

c) $\displaystyle\oint_{|\zeta|=1} \frac{\zeta}{e^{i\zeta}-1}\,d\zeta$

d) $\displaystyle\oint_{|\zeta|=2} \exp\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)d\zeta$

e) $\displaystyle\oint_{\partial G} \frac{2\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+2)(\zeta+i)}\,d\zeta\,,$ wobei $G := \{z \in \mathbb{C} \mid -3 < \operatorname{Re} z < 2,\ -2 < \operatorname{Im} z < 3\}$

Aufgabe 61

Untersuchen Sie, ob sich die durch $f(z) = e^{\sin z}$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt und für welche z diese gegebenenfalls konvergiert. Berechnen Sie dann

$$\oint_{|\zeta|=1/2} \zeta\, e^{\sin(1/\zeta)}\, d\zeta\,.$$

Aufgabe 62

Es sei $R > 0$. Die Kurven γ_1, γ_2, γ_3 seien gegeben durch die Parametrisierungen

$$\zeta_1(t) = t\,, \qquad \zeta_2(t) = R + it\,, \qquad \zeta_3(t) = t(1+i)\,, \qquad \text{jeweils mit } 0 \leqslant t \leqslant R\,.$$

a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_3} e^{-\zeta^2}\, d\zeta = \int_{\gamma_1} e^{-\zeta^2}\, d\zeta + \int_{\gamma_2} e^{-\zeta^2}\, d\zeta\,.$$

b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen

$$\int_{\gamma_2} e^{-\zeta^2}\, d\zeta \xrightarrow{R\to\infty} 0\,.$$

c) Berechnen Sie nun den Wert der so genannten *Fresnelschen Integrale*

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\, dx\,,$$

indem Sie den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten und $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ verwenden.

Aufgabe 63

Berechnen Sie den Wert des reellen Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{5 - 4\cos t}\, dt\,.$$

Übungsklausur Zur Teilnahme an der Übungsklausur am Samstag, den 06.07.2013, von 08:00 bis 10:00 Uhr ist keine Anmeldung erforderlich. Hörsaalverteilung der Übungsklausur:

Fachrichtung	Hörsaal
Namen L-Z	Benz-Hörsaal
Namen A-K	Daimler-Hörsaal

Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.