Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
3.7.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

12. Übungsblatt

Aufgabe 57

a) Wir verwenden bei diesem Integranden die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{\zeta^2+1} = \frac{1}{(\zeta+i)(\zeta-i)} = \frac{i/2}{\zeta+i} - \frac{i/2}{\zeta-i}.$$

Da die Punkte $-i$ und i im Inneren der Kreislinie $|\zeta| = 2$ liegen und die Funktion $\zeta \mapsto i\zeta^3/2$ im Gebiet $G = \mathbb{C}$ holomorph ist, ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel

$$\oint_{|\zeta|=2} \frac{\zeta^3}{\zeta^2+1}\, d\zeta = \oint_{|\zeta|=2} \frac{i\zeta^3/2}{\zeta-(-i)}\, d\zeta - \oint_{|\zeta|=2} \frac{i\zeta^3/2}{\zeta-i}\, d\zeta$$
$$= 2\pi i\, \frac{i\zeta^3}{2}\Big|_{\zeta=-i} - 2\pi i\, \frac{i\zeta^3}{2}\Big|_{\zeta=i} = -\pi(-i)^3 + \pi i^3 = -2\pi i\,.$$

b) Der Integrand lässt sich hier wie folgt umschreiben

$$\frac{e^\zeta}{\zeta^2+2\zeta} = \frac{e^\zeta}{\zeta(\zeta+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^\zeta}{\zeta} - \frac{e^\zeta}{\zeta+2}\Big).$$

Der Punkt 0 liegt im Inneren des Integrationsweges, der Punkt -2 dagegen im Äußeren. Folglich liefern die Cauchysche Integralformel und der Cauchysche Integralsatz

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta^2+2\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{2}\Big(\oint_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta-0}\, d\zeta - \oint_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta+2}\, d\zeta\Big) = \frac{1}{2}\Big(2\pi i\, e^\zeta\big|_{\zeta=0} - 0\Big) = \pi i\,.$$

c) Für die durch $f(\zeta) := \zeta e^{i\zeta}$ definierte, in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f gilt

$$f'(\zeta) = e^{i\zeta} + \zeta(ie^{i\zeta}) = (1+i\zeta)e^{i\zeta}\,, \qquad f''(\zeta) = ie^{i\zeta} + (1+i\zeta)(ie^{i\zeta}) = (2i-\zeta)e^{i\zeta}\,,$$

und wegen $|\pi| < 4$ erhalten wir mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen

$$\oint_{|\zeta|=4} \frac{\zeta e^{i\zeta}}{(\zeta-\pi)^3}\, d\zeta = 2\pi i\, \frac{f''(\pi)}{2!} = \pi i\,(2i-\zeta)e^{i\zeta}\big|_{\zeta=\pi} = \pi i\,(2i-\pi)(-1) = 2\pi + i\pi^2\,.$$

d) Die Nullstelle $\zeta_0 = 7$ des Nenners des Integranden liegt außerhalb der Kreislinie $|\zeta-2| = 3$, denn $|7-2| = 5 > 3$. Der Integrand ist also holomorph in dem konvexen und damit einfach zusammenhängenden Gebiet $G := \{\,\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta-2| < 5\,\}$, in welchem auch der glatte, geschlossene Integrationsweg verläuft. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt somit

$$\oint_{|\zeta-2|=3} \frac{e^{i\cos\zeta}\sin(\zeta^4+1)-\zeta}{(\zeta-7)^{42}}\, d\zeta = 0\,.$$

Aufgabe 58

Vorüberlegung: Will man

$$\frac{1}{z-a}$$

um den Punkt $z_0 \neq a$ in eine Laurent-Reihe entwickeln, so gibt es dafür zwei Möglichkeiten. Für $|z-z_0| < |a-z_0|$ hat man die Potenzreihen-Entwicklung

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0)+(z_0-a)} = \frac{1}{z_0-a}\cdot\frac{1}{\frac{z-z_0}{z_0-a}+1} = \frac{1}{z_0-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{a-z_0}} \\ &= \frac{1}{z_0-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{a-z_0}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(a-z_0)^{k+1}}\,.\end{aligned} \tag{$*$}$$

Für $|z-z_0| > |a-z_0|$ dagegen ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0)+(z_0-a)} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z_0-a}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-z_0}{z-z_0}} \\ &= \frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a-z_0}{z-z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\,.\end{aligned} \tag{$**$}$$

a) Für $1 < |z| < 3$ gilt

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{3-z} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{z^{-2}-1}-\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-z^{-2}}-\frac{1}{z-3} \\ &= -\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-2}\right)^k-\frac{1}{z-3} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2k+2}}-\frac{1}{z-3} \overset{(*)}{=} -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2(k+1)}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^{k+1}}\,.\end{aligned}$$

b) Die Partialbruchzerlegung des ersten Summanden von $f(z)$ liefert die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1}\right)-\frac{1}{z-3}\,.$$

Die Funktion f hat Polstellen in -1, in 1 und in 3. Da die beiden Punkte -1 und 3 von $z_0 = 1$ den Abstand 2 haben, kommen als Gebiete für die Laurent-Entwicklung um $z_0 = 1$ nur die beiden Kreisringe

$$0 < |z-1| < 2 \qquad \text{und} \qquad 2 < |z-1| < \infty$$

in Frage. Da der Punkt $1+3i$ im Konvergenzgebiet liegen soll und von z_0 den Abstand $|1+3i-1| = 3$ hat, ist der zweite Kreisring der richtige. Dort gilt gemäß $(**)$

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1-1)^k}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{(z-1)^{k+1}}\,,\qquad \frac{1}{z-3} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3-1)^k}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(z-1)^{k+1}}\,.$$

Also ergibt sich für $|z-1| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{(z-1)^{k+1}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(z-1)^{k+1}} = -\frac{1}{z-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(-2)^k-2^k}{(z-1)^{k+1}}\,.$$

Aufgabe 59

a) Die Funktion $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$ hat in $z_0 = 1$ einen Pol der Ordnung 4. Mit Hilfe der Formel aus Satz 1 in 7.1 sieht man

$$\operatorname{Res}(f;1) = \frac{1}{(4-1)!}\left(D^{4-1}\left((z-1)^4 f(z)\right)\right)\Big|_{z=1} = \frac{1}{6}\left(D^3\, e^z\right)\Big|_{z=1} = \frac{1}{6}\, e^z\Big|_{z=1} = \frac{e}{6}\,.$$

b) Da f in $z_0 = 1$ eine wesentliche Singularität besitzt, können wir nicht wie zuvor vorgehen. Wir bestimmen stattdessen die zugehörige Laurentreihe um 1 und lesen das Residuum ab

$$\begin{aligned} f(z) = ze^{\frac{1}{1-z}} &= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^n = \left((z-1)+1\right) \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}\,(z-1)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}\,(z-1)^{k+1} + \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}\,(z-1)^k \\ &= \sum_{l=-\infty}^{1} \frac{(-1)^{l-1}}{(-(l-1))!}\,(z-1)^l + \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}\,(z-1)^k \\ &= (z-1) + \sum_{k=-\infty}^{0} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{(-(k-1))!} + \frac{(-1)^k}{(-k)!}\right)(z-1)^k\,, \qquad z \neq 1\,. \end{aligned}$$

Das Residuum von f in 1 ist der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$, also

$$\operatorname{Res}(f;1) = \frac{(-1)^{-2}}{2!} + \frac{-1}{1!} = -\frac{1}{2}\,.$$

Aufgabe 60

a) Der Integrand $f(\zeta) := \frac{e^\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+3)^2}$ besitzt in 1 eine einfache und in -3 eine doppelte Polstelle und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -3\}$.

Da innerhalb des Integrationsweges $|\zeta| = 2$ nur die Polstelle 1 liegt, liefert der Residuensatz

$$\oint_{|\zeta|=2} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 1) = \frac{\mathrm{e}\pi i}{8}\,,$$

denn für das Residuum von f in 1 gilt

$$\operatorname{Res}(f; 1) = (\zeta - 1) f(\zeta)\Big|_{\zeta=1} = \frac{e^\zeta}{(\zeta+3)^2}\Big|_{\zeta=1} = \frac{e}{16}\,.$$

b) Nun liegen die beiden Polstellen -3 und 1 von f innerhalb des Integrationsweges $|\zeta| = 9$. Deswegen gilt nach dem Residuensatz

$$\oint_{|\zeta|=9} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \Big(\operatorname{Res}(f; 1) + \operatorname{Res}(f; -3)\Big) = 2\pi i \Big(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\Big) = \frac{(e - 5e^{-3})\pi i}{8}\,,$$

da

$$\operatorname{Res}(f; -3) = \left(D\left((\zeta+3)^2 f(\zeta)\right)\right)\Big|_{\zeta=-3} = \left(D\,\frac{e^\zeta}{\zeta - 1}\right)\Big|_{\zeta=-3} = \left(\frac{e^\zeta(\zeta-1) - e^\zeta}{(\zeta-1)^2}\right)\Big|_{\zeta=-3}$$
$$= \frac{-5e^{-3}}{16}\,.$$

c) Schreibe $f(\zeta) := \frac{\zeta}{e^{i\zeta}-1}$. Der Nenner von $f(\zeta)$ wird genau dann 0, wenn $\zeta = 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Von diesen Punkten liegt nur $\zeta = 0$ im Inneren des Kreises $|\zeta| = 1$. Daher ist

$$\oint_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 0)\,.$$

Nun sieht man anhand der Darstellung

$$f(\zeta) = \frac{\zeta}{e^{i\zeta} - 1} = \frac{\zeta}{\big(1 + i\zeta + \frac{1}{2}(i\zeta)^2 + \cdots\big) - 1} = \frac{\zeta}{i\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 + \cdots} = \frac{1}{i - \frac{1}{2}\zeta + \cdots}\,,$$

dass in $\zeta = 0$ eine hebbare Singularität von f vorliegt. Deshalb gilt $\operatorname{Res}(f; 0) = 0$ und das Integral hat den Wert 0.

d) Sei $f(\zeta) := e^{\frac{\zeta}{1-\zeta}}$. Hier liefert der Residuensatz

$$\oint_{|\zeta|=2} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 1)\,.$$

Um das Residuum $\operatorname{Res}(f; 1)$ zu berechnen, betrachten wir die Laurententwicklung von f um 1

$$f(\zeta) = \exp\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right) = \exp\left(-1 + \frac{1}{1-\zeta}\right) = e^{-1} e^{-1/(\zeta-1)} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\zeta - 1)^{-k}\,;$$

der Koeffizient von $(\zeta - 1)^{-1}$ lautet $-e^{-1}$. Also ist $\operatorname{Res}(f; 1) = -e^{-1}$ und damit

$$\oint_{|\zeta|=2} \exp\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right) d\zeta = -\frac{2\pi i}{e}\,.$$

e) Der Integrand $f(\zeta) := \frac{2\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+2)(\zeta+i)}$ besitzt in 1, -2, $-i$ jeweils einen Pol erster Ordnung und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -2, -i\}$. Da sich alle Polstellen im Inneren von G befinden, ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\oint_{\partial G} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \Big(\mathrm{Res}(f; 1) + \mathrm{Res}(f; -2) + \mathrm{Res}(f; -i)\Big)\,.$$

Wir berechnen nun die Residuen von f in den (einfachen) Polstellen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f;1) &= (\zeta-1)f(\zeta)\Big|_{\zeta=1} = \frac{2\zeta}{(\zeta+2)(\zeta+i)}\Big|_{\zeta=1} = \frac{2}{3(1+i)} = \frac{1}{3}\,(1-i)\,,\\
\mathrm{Res}(f;-2) &= (\zeta+2)f(\zeta)\Big|_{\zeta=-2} = \frac{2\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+i)}\Big|_{\zeta=-2} = \frac{4}{3(-2+i)} = -\frac{4}{15}\,(2+i)\,,\\
\mathrm{Res}(f;-i) &= (\zeta+i)f(\zeta)\Big|_{\zeta=-i} = \frac{2\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+2)}\Big|_{\zeta=-i} = \frac{2i}{(i+1)(-i+2)} = \frac{1}{5}\,(1+3i)\,.
\end{aligned}$$

Hiermit ist

$$\oint_{\partial G} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \left(\frac{1}{3}\,(1-i) - \frac{4}{15}\,(2+i) + \frac{1}{5}\,(1+3i)\right) = 0\,.$$

Aufgabe 61

Als Hintereinanderausführung holomorpher Funktionen ist die Funktion f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Sie lässt sich also um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n\,.$$

Diese Potenzreihe konvergiert auf der größten Kreisscheibe um $z_0 = 0$, auf der f holomorph ist. Hier konvergiert die Potenzreihe also für jedes $z \in \mathbb{C}$.
Der Integrand $\zeta f(1/\zeta)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und für $\zeta \neq 0$, insbesondere also für $0 < |\zeta| < 1$, gilt nach den obigen Überlegungen

$$\zeta f(1/\zeta) = \zeta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, \zeta^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, \zeta^{1-n}\,.$$

Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\oint_{|\zeta|=1/2} \zeta e^{\sin(1/\zeta)}\, d\zeta = \int_{|z|=1/2} \zeta f(1/\zeta)\, d\zeta = 2\pi i\, \mathrm{Res}(\zeta f(1/\zeta); 0)\,,$$

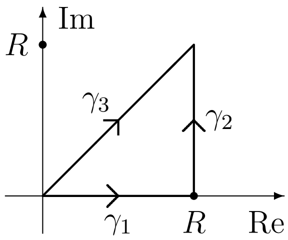
und Ablesen an der Laurentreihe für $\zeta f(1/\zeta)$ ergibt

$$= 2\pi i\, \frac{f''(0)}{2}\,.$$

Wegen $f'(z) = \cos(z) f(z)$, $f''(z) = -\sin(z) f(z) + \cos^2(z) f(z)$ und $f(0) = 1$ ist $f''(0) = 1$. Das Integral ist also gleich

$$2\pi i\, \frac{1}{2} = \pi i\,.$$

Aufgabe 62



a) Im einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{C}$ ist $f(\zeta) := e^{-\zeta^2}$ holomorph, und durch Aneinanderhängen von γ_1, γ_2 und $-\gamma_3$ erhält man eine geschlossene, positiv orientierte Kurve γ. Führen wir die Schreibweise $I(\Gamma) := \int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta$ ein, so liefert der Cauchysche Integralsatz

$$0 = I(\gamma) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) + I(-\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) - I(\gamma_3)\,.$$

Damit ergibt sich $I(\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2)$, also die behauptete Gleichung.

b) Es gilt $\zeta_2^2(t) = (R+it)^2 = R^2 + 2iRt - t^2$ und $\zeta_2'(t) = i$. Damit erhalten wir

$$|I(\gamma_2)| = \left|\int_0^R e^{-\zeta_2^2(t)}\zeta_2'(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^R \left|e^{-R^2-2iRt+t^2}i\right|dt = \int_0^R e^{t^2-R^2}\,dt\,.$$

Wegen der für alle $t \in [0,R]$ gültigen Abschätzung $t^2 \leqslant Rt$ bekommen wir folglich

$$|I(\gamma_2)| \leqslant \int_0^R e^{Rt-R^2}\,dt = \left[\frac{e^{Rt-R^2}}{R}\right]_{t=0}^R = \frac{1-e^{-R^2}}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0\,,$$

und damit ist $I(\gamma_2) \to 0$ für $R \to \infty$ bewiesen.

Bemerkung: Die Standardabschätzung für Kurvenintegrale hätte hier nicht ausgereicht, denn es gilt $L(\gamma_2) = R$ und $\max\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_2\} = 1$.

c) Wir betrachten nun noch $I(\gamma_1)$ und $I(\gamma_3)$. Für das erste Kurvenintegral erhalten wir

$$I(\gamma_1) = \int_0^R e^{-\zeta_1^2(t)}\zeta_1'(t)\,dt = \int_0^R e^{-t^2}\,dt \xrightarrow{R\to\infty} \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

und wegen $\zeta_3^2(t) = t^2(1+i)^2 = 2it^2$ und $\zeta_3'(t) = 1+i$ gilt

$$I(\gamma_3) = \int_0^R e^{-\zeta_3^2(t)}\zeta_3'(t)\,dt = \int_0^R e^{-2it^2}(1+i)\,dt \xrightarrow{R\to\infty} (1+i)\int_0^\infty e^{-2it^2}\,dt\,.$$

(Dieses uneigentliche Integral muss wegen der Konvergenz von $I(\gamma_1)$ und $I(\gamma_2)$ sowie der in **a)** bewiesenen Gleichung existieren.) Mit der Substitution $x = \sqrt{2}\,t$ ergibt sich

$$I(\gamma_3) \xrightarrow{R\to\infty} (1+i)\int_0^\infty e^{-ix^2}\,\frac{dx}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \left[\cos(x^2) - i\sin(x^2)\right]dx\,.$$

Beim Grenzübergang $R \to \infty$ folgt also mit **b)** aus der in **a)** bewiesenen Gleichung

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \left[\cos(x^2) - i\sin(x^2)\right]dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0\,.$$

Für die beiden Integrale $C := \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ und $S := \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ hat man somit

$$(1+i)(C - iS) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,, \qquad \text{d. h.} \qquad (C+S) + i(C-S) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,.$$

Hieraus folgen die Gleichungen $C + S = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ und $C - S = 0$, also ist $C = S = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$.

Aufgabe 63

Das zu berechnende Integral ist von der Form

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt\,, \qquad \text{mit} \quad R(x,y) := \frac{y}{5-4y}\,.$$

Ein solches Integral lässt sich als Kurvenintegral schreiben: Laut Satz 3 in 7.2 gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = \oint_{|z|=1} f(z)\, dz\,, \qquad \text{wobei} \quad f(z) := \frac{1}{iz}\, R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right).$$

Der Integrand des Kurvenintegrals ist

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{5 - 4\frac{z^2+1}{2z}} = \frac{1}{iz} \cdot \frac{z^2+1}{10z - 4(z^2+1)} = \frac{z^2+1}{-i(4z^3 - 10z^2 + 4z)}\,.$$

Diese Funktion f hat die Nullstellen des Nenners als isolierte Singularitäten: Wegen

$$4z^3 - 10z^2 + 4z = 4z(z^2 - \tfrac{5}{2}z + 1) = 4z(z-2)(z-\tfrac{1}{2})$$

sind dies $z_0 = 0$, $z_1 = 2$ und $z_2 = \frac{1}{2}$. Da der Punkt $z_1 = 2$ außerhalb des von der Integrationskurve umschlossenen Gebietes $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ liegt, die Punkte $z_0 = 0$ und $z_2 = \frac{1}{2}$ aber innerhalb, liefert der Residuensatz

$$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(f;0) + \operatorname{Res}(f;\tfrac{1}{2})\big)\,.$$

In $z_0 = 0$ und $z_2 = \frac{1}{2}$ hat der Nenner von $f(z)$ einfache Nullstellen, der Zähler ist $\neq 0$. Somit sind 0 und $\frac{1}{2}$ Polstellen erster Ordnung und für die Residuen erhält man nach Satz 2 in 7.1

$$\operatorname{Res}(f;0) = \frac{z^2+1}{-i(4z^3-10z^2+4z)'}\bigg|_{z=0} = \frac{z^2+1}{-i(12z^2-20z+4)}\bigg|_{z=0} = -\frac{1}{4i}\,,$$

$$\operatorname{Res}(f;\tfrac{1}{2}) = \frac{z^2+1}{-i(12z^2-20z+4)}\bigg|_{z=1/2} = \frac{\frac{1}{4}+1}{-i(3-10+4)} = \frac{\frac{5}{4}}{3i} = \frac{5}{12i}\,.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{5 - 4\cos t}\, dt = 2\pi i\left(-\frac{1}{4i} + \frac{5}{12i}\right) = 2\pi i\,\frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}\,.$$

— bitte wenden —