Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2014
17.04.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die 2π-periodischen Funktionen g und h seien gegeben durch

$$\begin{aligned} g(t) &= 1 + t + |t| \quad (-\pi \leqslant t < \pi), \qquad & g(t+2\pi) &= g(t), \\ h(t) &= \cos(\tfrac{1}{2}t) \quad (-\pi \leqslant t < \pi), \qquad & h(t+2\pi) &= h(t). \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Fourierreihen dieser Funktionen in reeller und komplexer Form.

Aufgabe 2

Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} \alpha t & \text{für } t \in [-\pi, 0)\,, \\ \beta t & \text{für } t \in [0, \pi)\,, \end{cases} \qquad f(t+2\pi) = f(t).$$

a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion f.

b) Welchen Bedingungen müssen α und β genügen, damit die Fourierreihe von f eine reine Sinusreihe ist?

c) Geben Sie (in Abhängigkeit von den Parametern α und β) an, in welchen Punkten $t \in \mathbb{R}$ die Funktion f durch ihre Fourierreihe dargestellt wird.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Funktion $f\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$, die durch $f(t) = t - \frac{\pi}{2}$ gegeben ist. Entwickeln Sie f in eine

a) Kosinusreihe, **b)** Sinusreihe.

Hinweis: Sie müssen die Funktion f jeweils unterschiedlich fortsetzen.

Aufgabe 4

a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die folgenden Vektoren aus $\mathbb{C}^3$ an:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Seien $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{y_1, y_2, y_3\}$ an.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

a) Ist $x \in V$ und gilt $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$, so folgt $x = 0$.

b) Es seien $x_1, \ldots, x_n, x \in V$. Ist $x \neq 0$ und ist x orthogonal zu jedem Vektor aus $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$, so folgt $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} \neq V$.

Aufgabe 6

Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$. Berechnen Sie $A \cdot A^T$ und $A^T \cdot A$.