

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive
Komplexe Analysis und Integraltransformationen
Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Setzen wir in die Darstellung aus **3 b)** aus dem Übungsblatt 1 $t = \pi/4$ ein, so ergibt sich

$$-\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \sin(n\pi/2) = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - + \dots$$

Die erste Reihe hat also den Wert $\pi/4$.

Setzen wir in die Darstellung aus **3 a)** $t = 0$ ein, so ergibt sich

$$-\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi} = -\frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right).$$

Die zweite Reihe ergibt also $\pi^2/8$.

Aufgabe 2

Annahme: Es gibt eine 2π -periodische, über $[-\pi, \pi]$ integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit reellen Fourierkoeffizienten $a_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}_0$) und $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k \in \mathbb{N}$). Die Besselsche Ungleichung besagt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Daher folgt wegen $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}(k) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = -\frac{i}{2\sqrt{k}}$ und $\hat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \frac{i}{2\sqrt{k}}$ (für alle $k \in \mathbb{N}$)

$$\infty > \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=-K}^K |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K (|\hat{f}(k)|^2 + |\hat{f}(-k)|^2) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \frac{1}{2k},$$

d.h. die Konvergenz der harmonischen Reihe. Dies ist ein Widerspruch! Deshalb existiert keine 2π -periodische, über $[-\pi, \pi]$ integrierbare Funktion, welche die Fourierreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{\sqrt{k}}$ besitzt.

Aufgabe 3

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare und 2π -periodische Funktion. Bezeichnen

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

die Fourierkoeffizienten von f , so gibt es nach dem Satz in 18.8 die Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Da f' stetig differenzierbar und 2π -periodisch ist, gilt nach dem Darstellungssatz in 18.8

$$f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

wobei

$$\gamma_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

die Fourierkoeffizienten von f' sind. Zum Nachweis der behaupteten Identität, müssen wir also $\gamma_k = ikc_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ zeigen.

Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ erhalten wir mit Hilfe von partieller Integration

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \underbrace{[f(t) e^{-ikt}]_{t=-\pi}^{\pi}}_{=0, \text{ da } 2\pi\text{-per.}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) i k e^{-ikt} dt = ikc_k. \end{aligned}$$

Im Fall $k = 0$ ergibt sich wegen der 2π -Periodizität von f

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{1}{2\pi} [f(t)]_{-\pi}^{\pi} = 0 = i \cdot 0 \cdot c_0.$$

Aufgabe 4

Für $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt

$$x \times y = \begin{pmatrix} -2 - 0 \\ 2 - 4 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$(x \times y | x) = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0$$

[dieses Ergebnis war zu erwarten, weil stets $x \times y$ sowohl orthogonal auf x als auch orthogonal auf y steht]. Für den Winkel φ , den die Vektoren x und y einschließen, gilt

$$\cos \varphi = \frac{(x|y)}{\|x\| \|y\|} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{4+4}} = \frac{-6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}} = -\sqrt{\frac{6}{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Hieraus folgt $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. Der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms lautet

$$\|x \times y\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}.$$

Aufgabe 5

Die beiden Vektoren haben offenbar Norm 1 und stehen senkrecht aufeinander. Das Kreuzprodukt dieser Vektoren ist orthogonal zu beiden und hat zudem Norm 1 (denn $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \varphi$, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren a und b ist). Wir wählen also

$$\frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

als dritten Vektor.

Aufgabe 6

Zunächst zur Matrix A : Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Dieses lautet

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 22 - \lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16 - \lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16 - \lambda \end{pmatrix} &=_{[Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_2]} \det \begin{pmatrix} 18 - \lambda & -18 + \lambda & 0 \\ 4 & 16 - \lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16 - \lambda \end{pmatrix} \\ &=_{[S_1 \rightarrow S_1 + S_2]} \det \begin{pmatrix} 0 & -18 + \lambda & 0 \\ 20 - \lambda & 16 - \lambda & -4 \\ 1 & -1 & 16 - \lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } Z_1]} (18 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 20 - \lambda & -4 \\ 1 & 16 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (18 - \lambda)((20 - \lambda)(16 - \lambda) + 4) = (18 - \lambda)(\lambda^2 - 36\lambda + 324) = -(\lambda - 18)^3. \end{aligned}$$

Wegen $\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 18$ besitzt die Matrix A nur den Eigenwert 18; dieser hat die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum $E_A(18)$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $Ax = 18x$ bzw. $(A - 18I_3)x = 0$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 18I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} Z_2 \rightarrow Z_2 - Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - \frac{1}{2}Z_1 \end{smallmatrix}]{Z_1 \rightarrow \frac{1}{4}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1) -Ergänzungstricks ab

$$E_A(18) = \text{Kern}(A - 18I_3) = \left\{ s \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{C} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Eigenwert 18 hat die geometrische Vielfachheit 2, weil der Eigenraum $E_A(18)$ zweidimensional ist. Da die geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 18 nicht übereinstimmen, ist A nicht diagonalisierbar.

Jetzt zur Matrix B : Wir berechnen das zugehörige charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =_{\begin{smallmatrix} [Z_1 \rightarrow Z_1 + (1-\lambda)Z_3] \\ [Z_2 \rightarrow Z_2 + 2Z_3] \end{smallmatrix}} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 2 - 2\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. n. } S_1]} -\det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2 - 2\lambda \end{pmatrix} = -(2 - 2\lambda - \lambda^2(1-\lambda)) = (\lambda^2 - 2)(1 - \lambda). \end{aligned}$$

Wegen $\chi_B(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ hat die Matrix B die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Diese haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1.

Wir bestimmen nun den Eigenraum $E_B(1)$ zu $\lambda_1 = 1$, also die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $(B - I_3)x = 0$:

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} Z_1 \leftrightarrow Z_3 \\ Z_2 \rightarrow Z_2 + 2Z_3 \end{smallmatrix}]{Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} Z_1 \rightarrow -Z_1, Z_2 \rightarrow -Z_2 \end{smallmatrix}]{Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des (-1) -Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_B(1) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Eigenwert 1 besitzt die geometrische Vielfachheit 1, weil der zugehörige Eigenraum eindimensional ist.

Schließlich müssen wir noch die zu den beiden Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ gehörenden Eigenräume bestimmen. Analoges Vorgehen wie eben ergibt

$$E_B(\sqrt{2}) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{und} \quad E_B(-\sqrt{2}) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit von $\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ beträgt jeweils 1. Die Matrix B ist diagonalisierbar, weil für jeden Eigenwert von B geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

Aufgabe 7

Wir berechnen das charakteristische Polynom von A : $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$

$$\begin{aligned} &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{\substack{[Z_3 \rightarrow Z_3+Z_2] \\ [Z_4 \rightarrow Z_4-Z_2]}}{=} \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{[S_2 \rightarrow S_2+S_4]}{=} \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{[Entw. Z_4]}{=} (4-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{[S_2 \rightarrow S_2-S_3]}{=} (4-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{[Entw. Z_3]}{=} (4-\lambda)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda)^2((3-\lambda)(1-\lambda)-3) = (4-\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda) = \lambda(\lambda-4)^3. \end{aligned}$$

Die Matrix A besitzt also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3). Wir bestimmen nun die Eigenräume:

Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das Gleichungssystem $(A - 0I_4)x = 0$, also $Ax = 0$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Z_1 \rightarrow Z_1-3Z_2 \\ Z_3 \rightarrow Z_3+Z_2 \\ Z_4 \rightarrow Z_4-Z_2}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Z_1 \rightarrow Z_1+2Z_3 \\ Z_4 \rightarrow Z_4+Z_3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir x_4 beliebig, so folgt aus der ersten/letzten Zeile $x_3 = -x_4$, aus der dritten $x_2 = x_4$ und aus der zweiten dann $x_1 = -x_4$. Wir haben also den eindimensionalen Eigenraum

$$E_A(0) = \text{lin}\{c_1\}, \quad \text{wobei} \quad c_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt zu $\lambda_2 = 4$:

$$A - 4I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Z_2 \rightarrow Z_2+Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3-Z_1 \\ Z_4 \rightarrow Z_4+Z_1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \rightarrow -Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1) -Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_A(4) = \text{lin}\{c_2, c_3, c_4\}, \quad c_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist als symmetrische Matrix diagonalisierbar. Da c_1 eine Basis von $E_A(0)$ und c_2, c_3, c_4 eine Basis von $E_A(4)$ ist, gilt für die Matrix S mit den Spalten c_1, c_2, c_3, c_4

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Da $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ symmetrisch ist, gibt es eine sogar orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit

$$P^TAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Um eine solches P anzugeben, bestimmen wir jeweils eine Orthonormalbasis der Eigenräume.

Eine Orthonormalbasis von $E_A(0)$ ist gegeben durch $b_1 := \frac{1}{\|c_1\|} c_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $E_A(4)$ verwenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren :

$$b_2 := \frac{1}{\|c_2\|} c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_3 := c_3 - (c_3|b_2)b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_3 := \frac{1}{\|\tilde{b}_3\|} \tilde{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_4 := c_4 - (c_4|b_2)b_2 - (c_4|b_3)b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$b_4 := \frac{1}{\|\tilde{b}_4\|} \tilde{b}_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Somit bilden b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $E_A(4)$.

Besitzt die Matrix P die Spalten b_1, b_2, b_3, b_4 , dann ist P orthogonal (d.h. $P^{-1} = P^T$) und es gilt

$$P^TAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$