Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2014
15.05.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(t) = t^n$.

a) Begründen Sie, dass die Laplacetransformierte $\mathscr{L}\{f_n\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$ existiert.

b) Zeigen Sie, dass

$$\mathscr{L}\{f_n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$ gilt.

Aufgabe 2

Sei $a > 0$ und $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion von exponentieller Ordnung γ. Zeigen Sie, dass die Funktion $t \mapsto f(at)$ von exponentieller Ordnung γa ist und dass gilt

$$\mathscr{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\{f\}\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > \gamma a\,.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie jeweils die Laplacetransformierte $\mathscr{L}\{f\}$ der Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

a) $f(t) = e^{at}(t^2 + bt + c) \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$

b) $f(t) = \cos(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$

c) $f(t) = \sinh(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$

d) $f(t) = \sinh^2(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils eine Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ mit

a) $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s-a} \quad (a \in \mathbb{C})$;

b) $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{e^{-3s}}{s+2}$;

c) $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2+4}$.

Aufgabe 5

Ermitteln Sie eine Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$, die der Gleichung

$$y(t) = t^3 + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$$

für alle $t \geqslant 0$ genügt.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie alle Funktionen y, die

$$y'(x) = y(x) \cdot \sin x \qquad \text{für alle } x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

erfüllen.

b) Geben Sie alle auf $[-1, 1]$ stetigen Funktionen y an mit

$$y(x) = \int_0^x y(t)\, dt \qquad \text{für alle } x \in [-1, 1].$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung auf dem angegebenen Intervall bzw. die Lösungen der Anfangswertprobleme.

a) $x^3 y' + (2-3x^2) y = x^3\,, \quad x \in (0, \infty)$ **b)** $y' + y \cos x = \sin x \cos x\,, \quad y(0) = 1$

c) $y''' + 3y'' + \frac{9}{4} y' = 0\,, \quad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

Aufgabe 8

Gegeben sei das System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u' &= 8u - 6v, \\ v' &= 9u - 7v. \end{aligned}$$

Stellen Sie dieses mit Hilfe einer geeigneten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in der Form

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1}$$

dar. Begründen Sie, dass A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, und definieren Sie Funktionen $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ so, dass (1) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

ist. Da D Diagonalgestalt besitzt, erhält man zwei entkoppelte Gleichungen, aus denen sich $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ berechnen lassen. Bestimmen Sie damit die Lösungen des Systems (1).