Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2014
28.05.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, periodische Funktion mit der Periode $T > 0$, d.h. $f(t+T) = f(t)$ für alle $t \geqslant 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$ gilt

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt\,.$$

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

i) $\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}$; **ii)** $\frac{x}{x^3+x^2-x-1}$.

b) Bestimmen Sie einen Ansatz für die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{(x+1)^2(x^3+1)}$.

Aufgabe 3

Ermitteln Sie jeweils eine Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

a) $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s^2-1}$; **b)** $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s^2+2s}$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils die Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

a) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 12\,, \qquad y(0) = 7\,, \quad y'(0) = 1$

b) $y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = e^t\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = 1$

c) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 6te^{-t}\,, \qquad y(0) = 6\,, \quad y(1) = 13/e$

Aufgabe 5

Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ für $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s}$ **b)** $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ für $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{(s+2)(s+1)}{(s^2+1)s}$

c) $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ für $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s}$ **d)** $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ für $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{\sqrt{s}}$

Aufgabe 6

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{für } xy \geqslant 0\,, \\ x+y & \text{für } xy < 0\,. \end{cases}$
Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt, soweit sie existieren.

b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar. Für die Richtungen $u := (1,2)$ und $v := (-1,1)$ gelte $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0) = -1$ sowie $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = 2$.

Bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial w}(x_0,y_0)$ für $w := (1,1)$. Geben Sie die Richtung $h \in \mathbb{R}^2$ mit $\|h\| = 1$ an, für die $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0,y_0)$ maximal wird.

Aufgabe 7

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Berechnen Sie in jedem Punkt den Gradienten von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen f_x und f_y in $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot v$?

e) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.

Aufgabe 8

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass diese Funktion im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist.

b) Rechnen Sie nach, dass die partiellen Ableitungen f_x und f_y in $(0,0)$ nicht stetig sind.

Aufgabe 9

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(x,y)$ für alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen das möglich ist.

c) Berechnen Sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0)$.

d) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.

e) Ist f zweimal stetig differenzierbar?

Hinweis: Argumentieren Sie mit dem Satz von Schwarz.