Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2014
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Die behauptete Auflösbarkeit folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn wir

$$f(0,0,-2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-2) \neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$, überprüft haben. Es gilt $f(0,0,-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 4z - 3xy\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0\,,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,g(x,y)\big)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\big(x,y,g(x,y)\big) \\ &= -\frac{1}{3g(x,y)^2 + 4g(x,y) - 3xy}\begin{pmatrix} -3yg(x,y) + 3x^2 & -3xg(x,y) - 3y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von $(0,0,1,1)$ durch die Gleichung

$$f(x,y,u,v) = \vec{0}\,, \qquad \text{mit} \quad f(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen u und v definiert werden. Offenbar ist $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass $f(0,0,1,1) = \vec{0}$ gilt; die ersten zwei Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)$ regulär ist. Wegen

$$f'(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad \frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

und damit $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,1,1) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrix ist tatsächlich regulär, denn $\det\left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right) = -4 \neq 0$.

Bilden wir in den beiden Gleichungen $x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0$ und $x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach x, wobei wir $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ jetzt als die implizit definierten Funktionen auffassen, so ergibt sich

$$2x - 2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x - 6uu_x + 8vv_x = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_x(0,0) + 2v_x(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_x(0,0) + 8v_x(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_x(0,0) = v_x(0,0) = 0$.

Um die partiellen Ableitungen nach y der implizit definierten Funktionen $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ zu berechnen, gehen wir analog wie eben vor. Wir bilden in beiden Gleichungen $x^2+y^2-u^2+v^2 = 0$ und $x^2+2y^2-3u^2+4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach y und erhalten

$$2y - 2uu_y + 2vv_y = 0 \qquad \text{und} \qquad 4y - 6uu_y + 8vv_y = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_y(0,0) + 2v_y(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_y(0,0) + 8v_y(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_y(0,0) = v_y(0,0) = 0$.

Aufgabe 2

a) Das zweite Taylorpolynom von f in $x^0 = (1,-1,0)$ ist gegeben durch

$$T_{2,x^0}(h) = f(x^0) + \nabla f(x^0)\cdot h + \tfrac{1}{2}h^T H_f(x^0)h\,.$$

Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = xe^z - y^2$, ergibt sich

$$f_x(x,y,z) = e^z\,, \qquad f_y(x,y,z) = -2y\,, \qquad f_z(x,y,z) = xe^z\,.$$

Damit erhalten wir $f_x(1,-1,0) = 1$, $f_y(1,-1,0) = 2$ und $f_z(1,-1,0) = 1$. Weiter gilt

$$f_{xx} = 0\,, \quad f_{xy} = 0\,, \quad f_{xz} = e^z\,, \quad f_{yy} = -2\,, \quad f_{yz} = 0\,, \quad f_{zz} = xe^z\,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$f(x^0) = 0\,, \qquad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\,, \qquad H_f(x^0) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$T_{2,x^0}(h_1,h_2,h_3) = 0 + h_1 + 2h_2 + h_3 + \tfrac{1}{2}\big(-2h_2^2 + h_3^2 + 2h_1h_3\big) = h_1 + 2h_2 + h_3 - h_2^2 + \tfrac{1}{2}h_3^2 + h_1h_3\,.$$

Schreibt man $h = (x,y,z) - x^0 = (x-1, y+1, z)$, so erhält man

$$(x-1) + 2(y+1) + z - (y+1)^2 + \tfrac{1}{2}z^2 + (x-1)z\,.$$

b) Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, gilt

$$\begin{array}{lllll}
f(x,y) & = e^{x-y}\cos x\sin y & \Rightarrow & f(0,0) & = & 0\\
f_x(x,y) & = e^{x-y}(\cos x\sin y - \sin x\sin y) & \Rightarrow & f_x(0,0) & = & 0\\
f_y(x,y) & = e^{x-y}(\cos x\cos y - \cos x\sin y) & \Rightarrow & f_y(0,0) & = & 1\\
f_{xx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x\sin y) & \Rightarrow & f_{xx}(0,0) & = & 0\\
f_{xy}(x,y) & = e^{x-y}(\sin x\sin y - \sin x\cos y - \cos x\sin y + \cos x\cos y) & \Rightarrow & f_{xy}(0,0) & = & 1\\
f_{yy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x\cos y) & \Rightarrow & f_{yy}(0,0) & = & -2\\
f_{xxx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x\sin y - 2\sin x\sin y) & \Rightarrow & f_{xxx}(0,0) & = & 0\\
f_{xxy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x\cos y + 2\sin x\sin y) & \Rightarrow & f_{xxy}(0,0) & = & 0\\
f_{xyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\sin x\sin y - 2\cos x\cos y) & \Rightarrow & f_{xyy}(0,0) & = & -2\\
f_{yyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\cos x\sin y + 2\cos x\cos y) & \Rightarrow & f_{yyy}(0,0) & = & 2
\end{array}$$

Damit ist für $h = (h_1,h_2)$

$$\begin{aligned}
T_{3,(0,0)}(h) &= f(0,0) + \tfrac{1}{1!}\,(h\cdot\nabla)f(0,0) + \tfrac{1}{2!}\,(h\cdot\nabla)^2 f(0,0) + \tfrac{1}{3!}\,(h\cdot\nabla)^3 f(0,0)\\
&= f(0,0) + \sum_{j=1}^{2} h_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}\,(0,0) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2} h_jh_k\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}\,(0,0) + \frac{1}{6}\sum_{j,k,l=1}^{2} h_jh_kh_l\,\frac{\partial^3 f}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_l}\,(0,0)\\
&= 0 + h_2 + \tfrac{1}{2}\big(h_1h_2 + h_2h_1 + h_2^2(-2)\big) + \tfrac{1}{6}\big(h_1h_2h_2(-2) + h_2h_1h_2(-2) + h_2h_2h_1(-2) + h_2^3 2\big)\\
&= h_2 + h_1h_2 - h_2^2 - h_1h_2^2 + \tfrac{1}{3}\,h_2^3.
\end{aligned}$$

Schreiben wir $(x,y) = h + x^0 = h$, so erhalten wir

$$T_{3,(0,0)}(x,y) = y + xy - y^2 - xy^2 + \tfrac{1}{3}\,y^3.$$

Aufgabe 3

a) Es gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (y+1, x-2) \stackrel{!}{=} (0,0)$ genau dann, wenn $(x,y) = (2,-1)$ ist. Somit ist $(2,-1)$ der einzige kritische Punkt von f. Wegen $\det H_f(2,-1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$ ist die Hesse-Matrix $H_f(2,-1)$ indefinit, so dass f in $(2,-1)$ einen Sattelpunkt besitzt.

b) Der Gradient von f lautet $\operatorname{grad} f(x,y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2)$. Die erste Komponente ist $= 0$ genau dann, wenn $y = 2x^2$ ist. In diesem Fall ergibt sich für die zweite Komponente $-3x + 24x^4 = 3x(8x^3 - 1)$. Die kritischen Punkte sind also $(0,0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$.

Da $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte -3 und 3 besitzt, ist $H_f(0,0)$ indefinit. Deshalb ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Da $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 3 und 9 besitzt, ist $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ positiv definit. Somit hat f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

c) Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte von f. Es gilt

$$f_x(x,y) = 2e^{-x^2-y^2} + (2x+2y+3)e^{-x^2-y^2}(-2x) = (-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2} .$$

Wegen $f(x,y) = f(y,x)$ ergibt sich daraus $f_y(x,y) = f_x(y,x) = (-4y^2 - 4xy - 6y + 2)e^{-x^2-y^2}$. Kritische Punkte von f sind solche mit $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$, also mit

$$-4x^2 - 4xy - 6x + 2 = 0 \qquad \text{und} \qquad -4y^2 - 4xy - 6y + 2 = 0 . \tag{$*$}$$

Wir ziehen die erste von der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$4(x^2 - y^2) + 6(x - y) = 0 , \qquad \text{also} \qquad (x-y)\big(4(x+y) + 6\big) = 0 .$$

Dies ist gleichbedeutend mit $x - y = 0$ oder $4(x+y) + 6 = 0$. Im ersten Fall, also für $x = y$, folgt aus $(*)$ die Gleichung

$$-8x^2 - 6x + 2 = 0 , \qquad \text{also} \qquad x^2 + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4} = 0 .$$

Diese hat die zwei Lösungen $x_{1,2} = -\frac{3}{8} \pm (\frac{9}{64} + \frac{1}{4})^{1/2}$, d. h. $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = -1$.
Im zweiten Fall (für $y = -x - \frac{3}{2}$) wird die erste Gleichung in $(*)$ zu

$$-4x^2 - 4x(-x - \tfrac{3}{2}) - 6x + 2 = 0 , \qquad \text{also} \qquad 2 = 0 .$$

Es gibt folglich genau zwei kritische Punkte: $(-1,-1)$ und $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Nur dort können lokale Extrema von f sein, doch ob tatsächlich Extrema vorliegen, müssen wir noch untersuchen. Dazu betrachten wir die Hessematrix von f. Es gilt

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (-8x - 4y - 6)e^{-x^2-y^2} - 2x(-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2} \\ &= (8x^3 + 8x^2y + 12x^2 - 12x - 4y - 6)e^{-x^2-y^2} , \\ f_{yy}(x,y) &= (8y^3 + 8xy^2 + 12y^2 - 4x - 12y - 6)e^{-x^2-y^2} , \\ f_{xy}(x,y) &= -4xe^{-x^2-y^2} - 2y(-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2} \\ &= (8x^2y + 8xy^2 + 12xy - 4x - 4y)e^{-x^2-y^2} . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(-1,-1) & f_{xy}(-1,-1) \\ f_{xy}(-1,-1) & f_{yy}(-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-2} & 4e^{-2} \\ 4e^{-2} & 6e^{-2} \end{pmatrix} .$$

Wegen $f_{xx}(-1,-1) = 6e^{-2} > 0$ und $\det H_f(-1,-1) = 20e^{-4} > 0$ ist diese Matrix positiv definit. Somit besitzt f im Punkt $(-1,-1)$ ein lokales Minimum. Weiter ist

$$H_f(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -9e^{-1/8} & -e^{-1/8} \\ -e^{-1/8} & -9e^{-1/8} \end{pmatrix}.$$

Wegen $f_{xx}(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = -9e^{-1/8} < 0$ und $\det H_f(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = 80e^{-1/4} > 0$ ist diese Matrix negativ definit. Im Punkt $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ hat f daher ein lokales Maximum.

Aufgabe 4

Da Q abgeschlossen und beschränkt ist und f auf Q stetig ist, nimmt f nach dem Satz in 19.18 auf Q Maximum und Minimum an.
Wir betrachten f zunächst im Inneren von Q, also auf $(0,5)\times(0,5)$. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy-4y-4x \\ x^2-4x+4 \end{pmatrix}.$$

Gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, so liefert die zweite Komponente $(x-2)^2 = 0$, d.h. $x = 2$. Für $x = 2$ lautet die erste Komponente -8. Diese ist stets $\neq 0$, so dass es keine kritischen Punkte von f gibt. Daher besitzt f keine lokalen Extremstellen in $(0,5)\times(0,5)$ und die Extrema von f werden auf dem Rand von Q angenommen. Wir untersuchen f auf dem Rand von Q:
$x = 0$: $f(0,y) = 4y-2$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(0,5) = 18$ und minimal für $y = 0$ mit $f(0,0) = -2$.
$x = 5$: $f(5,y) = 9y-52$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(5,5) = -7$ und minimal für $y = 0$ mit $f(5,0) = -52$.
$y = 0$: $f(x,0) = -2x^2-2 =: g_1(x)$. Wegen $g_1'(x) = -4x \leqslant 0$ für $x \in [0,5]$ ist g_1 auf $[0,5]$ monoton fallend. Daher sind 0 und 5 die Extremstellen von $g_1 = f(\cdot,0)$ mit $f(0,0) = -2$ und $f(5,0) = -52$.
$y = 5$: $f(x,5) = 3x^2-20x+18 =: g_2(x)$. Wegen $g_2'(x) = 6x-20 = 0 \iff x = \frac{10}{3} \in (0,5)$ müssen wir $f(0,5) = 18$, $f(\frac{10}{3},5) = -\frac{46}{3}$ und $f(5,5) = -7$ berücksichtigen.
Insgesamt erhalten wir

$$\max_{(x,y)\in Q} f(x,y) = 18 \qquad \text{und} \qquad \min_{(x,y)\in Q} f(x,y) = -52.$$

Aufgabe 5

Die Funktion f ist auf der Menge B stetig. Da B abgeschlossen und beschränkt ist, besitzt f auf B sowohl ein Maximum als auch ein Minimum.
Wir betrachten zuerst alle Punkte im Inneren von B, in denen f differenzierbar ist. Das sind alle $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{v}\|^2 = x^2+y^2+z^2 \in (0,1)$. Nimmt f an solch einer Stelle ein lokales Extremum an, so muss gelten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \nabla f(\vec{v}) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \begin{pmatrix} (z^2-1)x \\ (z^2-1)y \\ 2z\|\vec{v}\|^2+z^3-z \end{pmatrix}.$$

Wegen $z^2 < 1$ sind die ersten beiden Zeilen genau für $x = y = 0$ erfüllt. Mit diesen Werten von x und y ist $\|\vec{v}\|^2 = z^2$ und damit $2z\|\vec{v}\| + z^3 - z = z(3z^2-1)$. Also gilt die dritte Zeile genau für $z = 1/\sqrt{3}$ oder $z = -1/\sqrt{3}$ (Beachte: $x = y = z = 0$ wird in diesem Fall nicht berücksichtigt). Daher müssen wir im Inneren die Punkte $(0,0,1/\sqrt{3})$ und $(0,0,-1/\sqrt{3})$ untersuchen sowie den Nullpunkt, den wir zuvor ausgeschlossen haben:

$$f(0,0,0) = 0, \qquad f(0,0,-1/\sqrt{3}) = f(0,0,1/\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Nun bleibt noch der Rand ∂B von B zu untersuchen. Dort gilt $x^2+y^2+z^2 = 1$ und damit $f(x,y,z) = (z^2-1) =: g(z)$ für $z \in [-1,1]$. Wir sehen sofort, dass die Funktion g für $z = -1$ oder $z = 1$ ihr Maximum 0 und für $z = 0$ ihr Minimum -1 annimmt, welche damit auch die Extrema von f auf dem Rand von B sind. Es folgt: -1 ist das Minimum von f auf B und 0 das Maximum.

Ohne die Vereinfachung könnten wir auch folgendermaßen vorgehen:
Ist $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1$, definiert, so gilt $\partial B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ h(x,y,z) = 0\}$. Wir berechnen die Extrema von f auf ∂B unter Verwendung der Multiplikatorenregel von Lagrange: h ist auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, f hingegen nur auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, allerdings erfüllt $\vec{0}$ die Nebenbedingung $h(\vec{0}) = 0$ nicht. Weiter gilt $h'(x,y,z) = (2x \ \ 2y \ \ 2z)$, damit ist $\operatorname{rg} h'(x,y,z) = 1$ für alle $(x,y,z) \in \partial B$. Setzen wir $L(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) + \lambda h(x,y,z)$, so gibt es nach der Multiplikatorenregel von Lagrange für jeden Punkt $\vec{v}_0 = (x_0,y_0,z_0)$, in dem f ein Extremum auf ∂B hat, ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla L(x_0,y_0,z_0,\lambda_0) = \begin{pmatrix} f_x + \lambda_0 h_x \\ f_y + \lambda_0 h_y \\ f_z + \lambda_0 h_z \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_0^2-1)x_0/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 x_0 \\ (z_0^2-1)y_0/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 y_0 \\ 2z_0\|\vec{v}_0\| + (z_0^3 - z_0)/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 z_0 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem in x_0, y_0, z_0, λ_0 muss man nun lösen. Die globalen Extrema erhält man durch Vergleich der Funktionswerte an den Punkten (x_0,y_0,z_0), die das Gleichungssystem erfüllen.