Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Da die Exponentialfunktion exp und $z \mapsto -z^{-4}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph sind, ist f als Verkettung holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph, also auch komplex differenzierbar. (Dort sind folglich die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRD) erfüllt.) Nach der Kettenregel gilt

$$f'(z) = e^{-1/z^4}(4z^{-5}) = \frac{4e^{-1/z^4}}{z^5} \qquad (z \neq 0).$$

Nun zum Punkt $z_0 = 0$: Die Funktion f ist in 0 nicht einmal stetig, denn

$$f(re^{i\pi/4}) = e^{-e^{-i\pi}/r^4} = e^{1/r^4} \xrightarrow{r \to 0} \infty .$$

Folglich ist f in $z_0 = 0$ nicht komplex differenzierbar und damit erst recht nicht holomorph.

b) Die Funktionen $u(x,y) := \sin x \, \sin y$ und $v(x,y) := -\cos x \, \cos y$ sind offensichtlich auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \cos x \, \sin y \,, \qquad & u_y(x,y) &= \sin x \, \cos y \,, \\ v_x(x,y) &= \sin x \, \cos y \,, \qquad & v_y(x,y) &= \cos x \, \sin y \,. \end{aligned}$$

Wir prüfen die CRD nach: $u_x = v_y$ ist immer erfüllt. $u_y = -v_x$ gilt genau dann, wenn $\sin x \, \cos y = 0$ ist, also wenn $x = k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ oder $y = (m + \frac{1}{2})\pi$ mit einem $m \in \mathbb{Z}$. Genau in diesen Punkten ist f komplex differenzierbar. Da die Menge

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } \operatorname{Im} z = (m + \tfrac{1}{2})\pi \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \right\}$$

nicht offen ist, liegt nirgends Holomorphie vor. Für $z = x + iy \in M$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = \cos x \, \sin y + i \underbrace{\sin x \, \cos y}_{=0, \text{ da } z \in M} = \cos x \, \sin y \,.$$

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x+iy) = (x+iy)x = x^2 + ixy =: u(x,y) + iv(x,y)$. Die Funktionen $u, v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar mit

$$u_x(x,y) = 2x \,, \qquad u_y(x,y) = 0 \,, \qquad v_x(x,y) = y \,, \qquad v_y(x,y) = x \,.$$

Wegen

$$\begin{aligned} u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad &\iff \quad 2x = x \quad \iff \quad x = 0 \,, \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \quad &\iff \quad 0 = -y \quad \iff \quad y = 0 \end{aligned}$$

sind die CRD nur für $(x,y) = (0,0)$ erfüllt. Deshalb liegt nur in $z = 0$ komplexe Differenzierbarkeit vor. Da $\{0\} \subset \mathbb{C}$ nicht offen ist, ist f nirgendwo holomorph.

d) Hier ist $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$f(x+iy) = \frac{x+iy}{x-iy} + \frac{x-iy}{x+iy} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{2x^2-2y^2}{x^2+y^2}\,.$$

Wir definieren $u\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = \frac{2x^2-2y^2}{x^2+y^2}$, sowie $v\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $v(x,y) = 0$. Dann erhalten wir für $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = u(x,y)\,.$$

Offenbar sind u und v auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig differenzierbar; die Quotientenregel liefert

$$u_x(x,y) = \frac{4x(x^2+y^2) - (2x^2-2y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und genauso

$$u_y(x,y) = \frac{-8x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

außerdem gilt

$$v_x(x,y) = v_y(x,y) = 0\,.$$

Damit sind die CRD genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{-8x^2y}{(x^2+y^2)^2} = 0\,,$$

also wenn $x = 0$ oder $y = 0$ gilt. Die Funktion f ist somit auf der imaginären und der reellen Achse komplex differenzierbar (natürlich mit Ausnahme des Nullpunktes, wo sie gar nicht definiert ist). Hier lautet die Ableitung

$$f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 0\,.$$

Da $\{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \operatorname{Re} z = 0 \text{ oder } \operatorname{Im} z = 0\}$ nicht offen ist, liegt Holomorphie nirgends vor.

Aufgabe 2

a) Für die gegebene Parametrisierung gilt $\gamma'(t) = -ie^{i(\pi-t)}$, und es ist

$$F(\gamma(t)) = \overline{e^{i(\pi-t)}}\big(e^{i(\pi-t)}\big)^2 = e^{-i(\pi-t)}e^{2i(\pi-t)} = e^{i(\pi-t)}\,.$$

Nach Definition des (komplexen) Kurvenintegrals ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\int_\gamma F(z)\,dz &= \int_0^{\pi/2} F(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} e^{i(\pi-t)}(-ie^{i(\pi-t)})\,dt \\ &= -ie^{2\pi i}\int_0^{\pi/2} e^{-2it}\,dt = -i\left[\frac{e^{-2it}}{-2i}\right]_{t=0}^{\pi/2} = \frac{e^{-i\pi}-e^0}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1\,.\end{aligned}$$

b) Die Kurve γ durchläuft den Rand des Quadrates mit den Ecken 0, 1, $1+i$ und i, setzt sich also zusammen aus den vier Teilkurven

$$\gamma_1(t) = t\,, \qquad \gamma_2(t) = 1+it\,, \qquad \gamma_3(t) = 1-t+i\,, \qquad \gamma_4(t) = i(1-t)\,,$$

wobei jeweils $t \in [0,1]$ gilt. Somit folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma F(z)\,dz &= \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} F(z)\,dz = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 F(\gamma_k(t))\gamma_k'(t)\,dt = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 |\gamma_k(t)|^2\gamma_k'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 (1+t^2)i\,dt + \int_0^1 \big((1-t)^2+1\big)(-1)\,dt + \int_0^1 (1-t)^2(-i)\,dt \\ &= \int_0^1 \Big(t^2-(1-t)^2-1+i\big(1+t^2-(1-t)^2\big)\Big)\,dt = \int_0^1 (2t-2+2it)\,dt = -1+i\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Äquivalent zur Mini- bzw. Maximierung des Abstandes ist die Mini- bzw. Maximierung des Abstandquadrates

$$f(x,y) := \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2.$$

Die Nebenbedingung ist durch die Kreislinie

$$h(x,y) := x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$$

gegeben. Um die Multiplikatorenregel von Lagrange anwenden zu können, muss für die in Frage kommenden Punkte

$$\operatorname{rg} h'(x,y) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2(y+1) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 1$$

überprüft werden. Dies ist nur im kritischen Punkt $(1,-1)$ (Kreismittelpunkt) nicht erfüllt, der wegen $h(1,-1) = -1$ nicht auf der Kreislinie liegt und somit nicht Extremalkandidat ist.
Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y)$, und die notwendige Bedingung für Extrema lautet

$$\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(x+1) + 2\lambda(x-1) \\ 2(y-1) + 2\lambda(y+1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq -1$. Daher erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen

$$x(2+2\lambda) = 2\lambda - 2 \Longleftrightarrow x = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \quad \text{und} \quad y(2+2\lambda) = 2 - 2\lambda \Longleftrightarrow y = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}.$$

Also ist $y = -x$. Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $2x^2 - 4x + 1 = 0$, also

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{und damit} \qquad y_{1,2} = -x_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich sind $P_1 = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $P_2 = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ Kandidaten für Extrema. Da Maximum und Minimum der stetigen Funktion f auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$ angenommen werden und außerdem $\sqrt{f(P_1)} = 1 + 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{f(P_2)} = -1 + 2\sqrt{2}$ gilt, wird im Punkt P_1 der maximale Abstand $1 + 2\sqrt{2}$ und im Punkt P_2 der minimale Abstand $1 - 2\sqrt{2}$ angenommen.

Aufgabe 4

Da die Menge S beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert. Definiere

$$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} h_1(x,y,z) \\ h_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) = (0,0)\}$. Zur Bestimmung der globalen Extrema von f auf S verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen: Sowohl f als auch h sind auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Wegen

$$h'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

gilt $\operatorname{rg} h'(x,y,z) < 2$ genau für $x = y = z$; solche Punkte können jedoch nicht die Nebenbedingungen $h_1(x,y,z) = 0$ und $h_2(x,y,z) = 0$ erfüllen, denn aus $x + y + z = 0$ folgte dann $x = y = z = 0$ und damit wäre $x^2+y^2+z^2 = 1$ nicht erfüllt. Also erhalten wir sämtliche Kandidaten für Extremstellen durch Anwenden der Multiplikatorenregel von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &:= f(x,y,z) + \lambda_1 h_1(x,y,z) + \lambda_2 h_2(x,y,z) \\ &= 5x + y - 3z + \lambda_1(x+y+z) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1) \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \vec{0}$, also die fünf Gleichungen

$$5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0\,, \qquad 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0\,, \qquad -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0\,,$$
$$x + y + z = 0\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\,.$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x+y+z) = 0\,,$$

wegen $x+y+z = 0$ also $\lambda_1 = -1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4+2\lambda_2 x = 0$, was insbesondere $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y = 0$, woraus mit $\lambda_2 \neq 0$ sofort $y = 0$ folgt. Aus $x+y+z = 0$ ergibt sich dann $z = -x$ und in $x^2+y^2+z^2 = 1$ eingesetzt folgt $2x^2 = 1$, d.h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right).$$

Die Funktionswerte dort sind $f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\right) = 4\sqrt{2}$ bzw. $f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\right) = -4\sqrt{2}$. Folglich besitzt f auf der Menge S das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.