Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2014
18.06.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Das Vektorfeld $\vec{g}\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\vec{g}(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2-2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)\,.$$

Bestimmen Sie die Rotation und die Divergenz von $\vec{g}$.

Aufgabe 2

Wir führen auf $\mathbb{R}^2$ Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein. Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ für $r > 0$, $\varphi \in (-\pi,\pi)$.

a) Stellen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial r}$ und $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von u dar.

b) Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten die folgende Gestalt hat

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)\,.$$

Aufgabe 3

a) Die Kurve $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f\,ds \qquad \text{für} \quad f(x,y,z) := 2z - \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

b) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}$.

i) $\vec{v}(x,y) = (e^x, xy)\,, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

ii) $\vec{v}(x,y,z) = (y,-z,x)\,, \qquad \gamma(t) = (\sinh t, \cosh t, \sinh t)\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant \ln 2$

iii) $\vec{v}(x,y) = (\sin x, x^2+y^2)\,, \qquad \gamma(t) = \begin{cases} (t,0)\,, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (1,t-1)\,, & 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$

Aufgabe 4

Die Funktionen $\vec{v}, \vec{w} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3yx \\ 2y + z^3x^2 \\ y^2 + 3z^2yx^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w}(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Potentialfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s},$$

wobei die Kurve $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ durch $\gamma(t) = (1-t, t, 0)$ gegeben ist.

Aufgabe 5

Berechnen Sie den Wert der folgenden Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz$ **b)** $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz$

Der Integrationsweg soll dabei jeweils die positiv orientierte Kreislinie sein.

Aufgabe 6

Entwickeln Sie $F(z) = \frac{1+i}{z^2-z-iz+i}$ in eine Laurentreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, welche auf $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ konvergiert.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten von F sowie die Residuen in diesen Punkten.

a) $F(z) = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$ **b)** $F(z) = \dfrac{ze^{az}}{(z-1)^2}$ $(a \in \mathbb{C}$ fest$)$

Aufgabe 8

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\,dz$ **b)** $\displaystyle\int_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\,dz$

c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1}\,dz$

Der Integrationsweg soll dabei jeweils die positiv orientierte Kreislinie sein.