Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2014
03.07.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 1 \leqslant x \leqslant 2\,,\; 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\right\}.$$

b) Die beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ sei durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + 2z = 1$ begrenzt. Berechnen Sie das Integral $\iiint\limits_B \sin z \, d(x, y, z)$.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie für alle $a, b, c > 0$ das Volumen $\iiint\limits_E d(x, y, z)$ des Ellipsoids

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1\right\}.$$

b) Berechnen Sie für die Menge

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leqslant z \leqslant 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leqslant (1 - z)^2\right\}$$

das Integral

$$\iiint\limits_A (x^2 + y^2)^2 \, e^{2(1-z)^7} \, d(x, y, z)\,.$$

c) Sei $0 < r < R$. Berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_B \frac{y}{x} \, d(x, y)\,, \qquad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \|(x, y)\| \in [r, R],\ |y| \leqslant x\right\}.$$

Aufgabe 3

Für das elektrostatische Potential $U(\vec{a})$ einer mit der Dichte ϱ homogen geladenen Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ im Punkt $\vec{a} \notin \mathcal{F}$ gilt nach Coulomb

$$U(\vec{a}) = \varrho \iint\limits_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \, do\,.$$

Bestimmen Sie $U(\vec{a})$ in $\vec{a} = (0, 0, 1)$, falls $\mathcal{F}$ der durch $0 \leq z \leq 1$ beschränkte Teil des Kegelmantels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}$ ist.

Hinweis: Es gilt $\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2 - 2r + 1}} \, dr = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} - 1)$.

Aufgabe 4

Gegeben seien der Kegel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ sowie das Vektorfeld $\vec{f} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(x, y, z) = (z, y, z + 1)$. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche des Kegels K nach außen.

Hinweis Die Aufgaben **1,2,3,4** sind die **HM-2** Aufgaben.