Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2014
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für $(x, y, z) \in A$ gilt nach Definition der Menge $x \in [1, 2]$ sowie $0 \leqslant x^2 - y^2$, also $y^2 \leqslant x^2$, d.h. $|y| \leqslant |x| = x$ wegen $x > 0$. Mit

$$A_0 := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [1, 2], \ -x \leqslant y \leqslant x\big\}$$

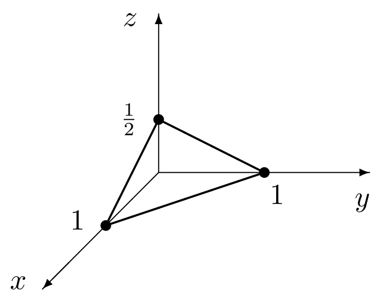
lässt sich A folgendermaßen schreiben

$$A = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in A_0, \ 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\big\}.$$

[In der Notation von Abschnitt 21.2: $B_0 = A_0$, $a = 1$, $b = 2$, $u(x) = -x$, $v(x) = x$, $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = x^2 - y^2$.] Da der Integrand $f(x, y, z) = 1$ stetig ist, erhält man nach 21.2

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(A) &= \iiint_A d(x, y, z) = \int_1^2 \int_{-x}^{x} \int_0^{x^2-y^2} dz\, dy\, dx = \int_1^2 \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\, dy\, dx \\ &= \int_1^2 \big[x^2 y - \tfrac{1}{3}y^3\big]_{y=-x}^{x} dx = \int_1^2 \tfrac{4}{3}x^3\, dx = \big[\tfrac{1}{3}x^4\big]_{x=1}^{2} = \tfrac{1}{3}(16 - 1) = 5\,.\end{aligned}$$

b)



Die Menge B wird von den Koordinatenebenen und von der Ebene durch die drei Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, \frac{1}{2})$ begrenzt (siehe Skizze). Damit ist $(x, y, z) \in B$ äquivalent zu

$$0 \leqslant x \leqslant 1\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\,, \quad 0 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}(1 - x - y)\,.$$

Bei B handelt es sich also um

$$\begin{aligned}&B = \big\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in B_0\,, \ 0 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}(1 - x - y)\,\big\}\,, \\ &\text{wobei} \quad B_0 := \big\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 1\,, \ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\,\big\}\,.\end{aligned}$$

Da $(x, y, z) \mapsto \sin(z)$ auf B stetig ist, ergibt sich für das Integral nach 21.2

$$\begin{aligned}\iiint_B \sin z\, d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{(1-x-y)/2} \sin z\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \big[-\cos z\big]_{z=0}^{(1-x-y)/2} dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big(-\cos\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + 1\Big)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \big[2\sin\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + y\big]_{y=0}^{1-x} dx = \int_0^1 \Big(1 - x - 2\sin\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\Big)\, dx \\ &= \big[x - \tfrac{1}{2}x^2 - 4\cos\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\big]_{x=0}^{1} = \big(1 - \tfrac{1}{2} - 4\cos 0\big) + 4\cos\big(\tfrac{1}{2}\big) = -\tfrac{7}{2} + 4\cos\big(\tfrac{1}{2}\big)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Seien $a, b, c > 0$. Um

$$\operatorname{vol}(E) := \iiint\limits_E d(x,y,z)$$

für die Menge

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1\right\}$$

zu berechnen, führen wir die Substitution $(x,y,z) = (au, bv, cw)$ durch. Die Substitutionsfunktion lautet also $\Phi(u,v,w) = (au, bv, cw)$ und hat die Ableitung

$$\Phi'(u,v,w) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

mit $\det \Phi'(u,v,w) = abc > 0$. Ist $K := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \;:\; u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1\}$ gesetzt, so gilt $\Phi(K) = E$, denn

$$(u,v,w) \in K \quad\Longleftrightarrow\quad \left(\frac{au}{a}\right)^2 + \left(\frac{bv}{b}\right)^2 + \left(\frac{cw}{c}\right)^2 \leqslant 1 \quad\Longleftrightarrow\quad (au, bv, cw) = \Phi(u,v,w) \in E.$$

Daher erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformel 21.3

$$\iiint\limits_E d(x,y,z) = \iiint\limits_K abc\, d(u,v,w) = abc \iiint\limits_K d(u,v,w)\,.$$

Nach Beispiel 21.2 (1) (mit $r = 1$) beträgt das Volumen von K: $\frac{4}{3}\pi$, so dass

$$\iiint\limits_E d(x,y,z) = abc\,\frac{4\pi}{3}$$

folgt. Alternativ liefern Kugelkoordinaten $(u,v,w) = (r\cos\varphi\,\cos\vartheta, r\sin\varphi\,\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ mit $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ für $\operatorname{vol}(K)$ ebenfalls

$$\iiint\limits_K d(u,v,w) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^2\, d\varphi\, dr = \int_0^1 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi}{3}\,.$$

b) Wir greifen auf Zylinderkoordinaten zurück:

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad z = z\,, \qquad d(x,y,z) = r\, d(r,\varphi,z)\,.$$

Für $(x,y,z) \in A$ gilt $0 \leqslant z \leqslant 1$, und die zweite A definierende Ungleichung liefert die Bedingung $r^2 \leqslant (1-z)^2$. Die Menge A ist also charakterisiert durch

$$0 \leqslant z \leqslant 1\,, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1 - z\,.$$

Die Transformationsformel liefert nun

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_A (x^2+y^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} (r^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, r\, dr\, d\varphi\, dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-z} r^5 e^{2(1-z)^7}\, dr\, dz = 2\pi \int_0^1 \left[\tfrac{1}{6} r^6\right]_{r=0}^{1-z} e^{2(1-z)^7}\, dz \\
&= \int_0^1 \tfrac{1}{3}\pi (1-z)^6\, e^{2(1-z)^7}\, dz = \left[-\frac{\pi e^{2(1-z)^7}}{42}\right]_{z=0}^{1} = \frac{\pi(e^2-1)}{42}\,.
\end{aligned}$$

c) Sei $0 < r < R$. Zur Berechnung von

$$\iint\limits_B \frac{y}{x}\, d(x,y)\,, \qquad B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \|(x,y)\| \in [r,R],\; |y| \leqslant x\big\}$$

führen wir Polarkoordinaten ein:

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi \quad \text{mit } \varrho \in [r,R],\; \varphi \overset{(*)}{\in} [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}].$$

(Hierbei ergibt sich $(*)$ durch die Bedingung $|y| \leqslant x$. Würde man $\varphi \in [0, 2\pi]$ fordern, so müsste man $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{7}{4}\pi, 2\pi]$ wählen und B in $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| \in [r,R], 0 \leqslant y \leqslant x\}$ und $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| \in [r,R], -x \leqslant y \leqslant 0\}$ zerlegen. Dann ist $\iint_B \frac{y}{x}\, d(x,y) = \iint_{B_1} \frac{y}{x}\, d(x,y) + \iint_{B_2} \frac{y}{x}\, d(x,y)$.) Wir erhalten

$$\iint\limits_B \frac{y}{x}\, d(x,y) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_r^R \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi = \tfrac{1}{2}(R^2 - r^2) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan\varphi\, d\varphi = 0.$$

Das letzte Gleichheitszeichen ergibt sich, weil der Tangens eine ungerade Funktion ist und über ein zu 0 symmetrisches Intervall integriert wird.

Aufgabe 3

Eine Parametrisierung des Kegelmantels $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,1] \times [0, 2\pi].$$

Mit

$$\big\|\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}\, r$$

und

$$\|\vec{g}(r,\varphi) - \vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r-1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2r^2 - 2r + 1}$$

erhält man

$$\begin{aligned} U(\vec{a}) &= \varrho \iint\limits_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|}\, do = \varrho \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{1}{\|\vec{g}(r,\varphi) - \vec{a}\|} \big\|\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big\|\, d(r,\varphi) \\ &= \varrho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2r^2 - 2r + 1}} \sqrt{2}\, r\, d\varphi\, dr = 2\sqrt{2}\,\pi\,\varrho \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2 - 2r + 1}}\, dr \overset{\text{Hinweis}}{=} -2\pi\varrho\ln(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$\vec{N}$ sei stets die Einheitsnormale auf ∂K, die ins Äußere von K gerichtet ist. Für den Fluß des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen gilt

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do.$$

Die Oberfläche ∂K besteht aus dem Kegelmantel und dem Grundkreis. Wir parametrisieren zunächst den Kegelmantel

$$M := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\; z \geqslant 0\big\}$$

durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 2-r \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach außen. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big) &= \begin{pmatrix} 2-r \\ r\sin\varphi \\ 3-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} = (2-r)r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3-r)r \\ &= (2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2). \end{aligned}$$

Für den Fluß von $\vec{f}$ durch die Mantelfläche M nach außen erhält man

$$\begin{aligned} \iint\limits_M \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)}{\|\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\|} \|\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\|\, d(r,\varphi) \\ &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big)\, d(r,\varphi) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \big((2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2)\big)\, d\varphi\, dr \\ &= \int_0^2 \big(\pi r^2 + (3r-r^2)2\pi\big)\, dr = \Big[\pi\,\frac{r^3}{3} + \Big(\frac{3}{2}\,r^2 - \frac{r^3}{3}\Big)\,2\pi\Big]_0^2 = \frac{28}{3}\,\pi. \end{aligned}$$

Eine Parametrisierung des Grundkreises

$$G := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \leqslant 4,\; z=0\big\}$$

ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach innen. Wegen

$$\vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(-\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = -r$$

ergibt sich für den Fluß von $\vec{f}$ durch die Grundfläche G nach außen

$$\begin{aligned} \iint\limits_G \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} f(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(-\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big)\, d(r,\varphi) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -r\, d\varphi\, dr = -\int_0^2 2\pi r\, dr = -4\pi. \end{aligned}$$

Der Fluß von $\vec{f}$ durch die gesamte Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen beträgt somit

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \iint\limits_{M} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do + \iint\limits_{G} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \frac{28}{3}\,\pi - 4\pi = \frac{16}{3}\,\pi.$$

Bemerkung: Alternativ kann man $\iint_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do$ auch mit dem Divergenzsatz im $\mathbb{R}^3$ (Diesen nennt man auch den *Gaußschen Integralsatz.*) berechnen:

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_{K} \nabla \cdot \vec{f}\, d\tau = \iiint\limits_{K} 2\, d(x,y,z),$$

wobei wir hier $d\tau$ für $d(x,y,z)$ geschrieben haben. Mit Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

lässt sich K charakterisieren durch

$$r \in [0,2], \qquad \varphi \in [0,2\pi], \qquad z \in [0, 2-r],$$

so dass folgt

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= 2 \iiint\limits_{K} d(x,y,z) = 2 \int_0^2 \int_0^{2-r} \int_0^{2\pi} r\, d\varphi\, dz\, dr \\
&= 4\pi \int_0^2 \int_0^{2-r} r\, dz\, dr = 4\pi \int_0^2 (2r - r^2)\, dr = 4\pi \big[r^2 - \tfrac{1}{3}\, r^3\big]_0^2 = \frac{16}{3}\,\pi.
\end{aligned}$$