**Institut für Analysis**
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
19.04.2016

# Höhere Mathematik II

## für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

**Lösungen zu Aufgabe 1**: a) Wir können die Determinante direkt berechnen indem wir die Regel von Sarrus benutzen.

$$\det(A) = 3\cdot(-1)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)\cdot 2+2\cdot 1\cdot 1-2\cdot(-1)\cdot 2-1\cdot(-1)\cdot 3-(-2)\cdot 1\cdot(-2) = 6+4+2+4+3-4 = 15.$$

Alternativ wissen wir, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz.

$$\det(A) =_{[Z_3\to Z_3-2Z_2]} \det\begin{pmatrix}3&-2&2\\1&-1&-1\\0&3&0\end{pmatrix} =_{[\text{Entw. nach } Z_3]} -3\det\begin{pmatrix}3&2\\1&-1\end{pmatrix} = -3(3\cdot(-1)-1\cdot 2) = 15.$$

b) Da $\det(A)\neq 0$, ist $A$ regulär und das Gleichungssystem damit eindeutig lösbar. Die Cramersche Regel besagt, dass die Komponenten von $\vec{x}$ gegeben sind durch $x_i = \det(M_i)/\det(A)$, wobei die Matrix $M_i$ aus der Matrix $A$ entsteht, indem man die $i$-te Spalte von $A$ durch $\vec{b}$ ersetzt. Konkret (für die Berechung der Determinanten verwenden wir die Regel von Sarrus) heißt das:

$$x_1 = \frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&-1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix} = \frac{2+2+0+2+1-0}{15} = \frac{7}{15},$$
$$x_2 = \frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}3&1&2\\1&0&-1\\2&1&-2\end{pmatrix} = \frac{0-2+2+0+3+2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3},$$
$$x_3 = \frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix} = \frac{-3+0+1+2-0+2}{15} = \frac{2}{15}.$$

Also: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7/15\\1/3\\2/15\end{pmatrix}$.

c) Indem man die Cramersche Regel für eine reguläre $n\times n$-Matrix verwendet und direkt die Entwicklungsformel auf die $j$-te Spalte anwendet, erhält man

$$A^{-1}_{j,k} = \frac{(-1)^{j+k}}{\det(A)}\det\widehat{A_{j,k}},$$

wobei man die Matrix $\widehat{A_{j,k}}$ aus der Matrix $A$ erhält, indem man die $j-te$ Spalte und die $k$-te Zeile

streicht. Somit ist $\widehat{A_{j,k}}$ eine $(n-1)\times(n-1)$-Matrix. Hier ergibt sich

$$A^{-1}_{1,1} = \frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix} = \frac{3}{15}$$
$$A^{-1}_{2,1} = \frac{-1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix} = 0$$
$$A^{-1}_{3,1} = \frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \frac{3}{15}$$
$$A^{-1}_{1,2} = \frac{-1}{15}\det\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix} = \frac{-2}{15}$$
$$A^{-1}_{2,2} = \frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix} = \frac{-10}{15}$$
$$A^{-1}_{3,2} = \frac{-1}{15}\det\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \frac{-7}{15}$$
$$A^{-1}_{1,3} = \frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \frac{4}{15}$$
$$A^{-1}_{2,3} = \frac{-1}{15}\det\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{5}{15}$$
$$A^{-1}_{3,3} = \frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{-1}{15}$$

Insgesamt:

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 0 & -10 & 5\\ 3 & -7 & -1\end{pmatrix}$$

**Lösungen zu Aufgabe 2**: Wir berechnen

$$B^TB = \begin{pmatrix}14 & 14\\ 14 & 98\end{pmatrix}, \qquad BB^T = \begin{pmatrix}20 & 2 & 38\\ 2 & 10 & -6\\ 38 & -6 & 82\end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\det(B^TB) = (14\cdot 98) - (14\cdot 14) = 1176.$$

Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz.

[Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\det(BB^T) =_{[Z_1\to Z_1-10Z_2]} \begin{pmatrix}0 & -98 & 98\\ 2 & 10 & -6\\ 38 & -6 & 82\end{pmatrix} =_{[Z_3\to Z_3-19Z_2]} \begin{pmatrix}0 & -98 & 98\\ 2 & 10 & -6\\ 0 & -196 & 196\end{pmatrix}$$
$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} (-2)\cdot\det\begin{pmatrix}-98 & 98\\ -196 & 196\end{pmatrix} = 0.$$

Für $n\times n$-Matrizen gilt bekanntlich $\det(B) = \det(B^T)$ und wegen der Multiplikativität der Determinante damit $\det(BB^T) = \det(B^TB) = (\det(B))^2$. Hier ist aber $\det(BB^T) \neq \det(B^TB)$, was aber kein Widerspruch zur Vorlesung ist, da $B$ keine $n\times n$-Matrix ist.

Man kann $\det(BB^T) = 0$ auch ohne größere Rechnungen zeigen. Die Dimensionsformel für $n\times m$-Matrizen $A$ besagt

$$m = \text{Rang } A + \dim \text{Kern } A.$$

Damit: $3 = \text{Rang } B^T + \dim \text{Kern } B^T$. Wegen Rang $B^T \leq n = 2$ folgt dim Kern $B^T \geq m - n = 1$. Sei $\vec{v}\neq 0$ ein Vektor aus Kern $B^T$. Dann ist $\vec{v}$ auch im Kern von $BB^T$, also hat $BB^T$ einen nichttrivialen Kern und somit ist $BB^T$ nicht regulär. Insgesamt: $\det(BB^T) = 0$.

**Lösungen zu Aufgabe 3**: Wir verwenden vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

IA: $n = 2$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq j < k \leq 2} (x_k - x_j) \,.$$

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ beliebig. Es gelte

$$\det \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{n-1} \\ 1 & y_3 & y_3^2 & \dots & y_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \dots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (y_k - y_j) \quad \text{für alle } y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R} \text{ (IV)}.$$

Seien nun $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Zur Berechnung von

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

multiplizieren wir zuerst die vorletzte Spalte mit $x_1$ und ziehen diese von der letzten ab. Dann multiplizieren wir die vorvorletzte Spalte mit $x_1$ und ziehen diese von der vorletzten ab, usw. Die letzte Umformung besteht darin, das $x_1$-fache der ersten Spalte von der zweiten Spalte abzuziehen.

Für $k = n+1, n, \dots, 3, 2$ ziehen wir also nacheinander das $x_1$-fache der $(k-1)$-ten Spalte von der $k$-ten Spalte ab. Im Anschluss entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \dots & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^n - x_1 x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_3^{n-1}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_1) \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \dots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{pmatrix}$$

Nun können wir aus der ersten Zeile dieser Matrix den Faktor $(x_2 - x_1)$ herausziehen, aus der zweiten Zeile $(x_3 - x_1)$ etc. und aus der letzten Zeile den Faktor $(x_{n+1} - x_1)$:

$$= \underbrace{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1)}_{= \prod_{1 < l \leq n+1} (x_l - x_1)} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diese $n \times n$ Matrix ist wiederum eine Vandermonde-Matrix. Gemäß Induktionsvoraussetzung mit $y_m =$

$x_{m+1}$ (für $m = 1, 2, \ldots, n$) gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_{k+1} - x_{j+1}) = \prod_{2 \le i < l \le n+1} (x_l - x_i).$$

Zusammen ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1 < l \le n+1} (x_l - x_1) \cdot \prod_{2 \le i < l \le n+1} (x_l - x_i) = \prod_{1 \le i < l \le n+1} (x_l - x_i).$$

**Lösungen zu Aufgabe 4**: Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz. Wir starten mit Umformungen in Zeile 4, denn diese enthält die meisten Nullen.

[Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\begin{aligned} \det(C) &=_{[S_3 \to S_3 + 2S_2]} \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \\ -6 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. nach } Z_4]} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \\ -6 & 7 & 9 \end{pmatrix} \\ &=_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. nach } S_1]} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = (2 \cdot 4) - (-3 \cdot 1) = 11 \end{aligned}$$

**Lösungen zu Aufgabe 5**: Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz.

[Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\begin{aligned} \det(D) &=_{[Z_1 \to Z_1 - Z_4]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} =_{[S_4 \to S_4 - S_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} =_{[S_3 \to S_3 - S_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} = \alpha - 4 - 1 = \alpha - 5. \end{aligned}$$

Man sieht: $\det D \neq 0 \iff \alpha \neq 5$. Daher ist $D$ genau für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{5\}$ regulär.

**Lösungen zu Aufgabe 6**: Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 - 0 \\ 2 - 4 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$(\vec{x}\times\vec{y}|\vec{x}) = (\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}) = -2\cdot(-2)+(-2)\cdot 1+(-2)\cdot 1 = 0$$

[dieses Ergebnis war zu erwarten, weil stets $\vec{x}\times\vec{y}$ sowohl orthogonal auf $\vec{x}$ als auch orthogonal auf $\vec{y}$ steht]. Für den Winkel $\phi$, den die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ einschließen, gilt

$$\cos\phi = \frac{(\vec{x}|\vec{y})}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|} = \frac{-2\cdot 2+1\cdot 0+1\cdot(-2)}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+4}} = \frac{-6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}} = -\sqrt{\frac{6}{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Hieraus folgt $\phi = \frac{5\pi}{6}$. Der Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms lautet

$$\|\vec{x}\times\vec{y}\| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}\,.$$