

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Lösungen zu Aufgabe 1

- a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist die Funktion f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist f auch stetig: Mit Hilfe von $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ [Diese Ungleichung folgt aus der binomischen Formel: $0 \leq (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow -xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ sowie $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$] ergibt sich für $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2 + y^2} |y| \leq \frac{1}{2} |y| \rightarrow 0 \quad \text{für } (x,y) \rightarrow (0,0),$$

also gilt $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, d.h. f ist stetig in $(0,0)$.

Alternativ: Es gelte $(x_n, y_n) \rightarrow (0,0)$ mit $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $r_n > 0$ und $\varphi_n \in [0, 2\pi)$ mit $(x_n, y_n) = (r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n)$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x_n, y_n) &= f(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n) = \frac{(r_n \cos \varphi_n)(r_n \sin \varphi_n)^2}{(r_n \cos \varphi_n)^2 + (r_n \sin \varphi_n)^2} \\ &= \frac{r_n^3 \cos \varphi_n \sin^2 \varphi_n}{r_n^2} = r_n \cos \varphi_n \sin^2 \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

weil $r_n \rightarrow 0$ strebt und die Folge $(\cos \varphi_n \sin^2 \varphi_n)$ beschränkt ist.

- b) Die Funktion g ist nicht stetig in $(0,0)$, denn es gilt

$$g(1/n^2, 1/n) = \frac{1/n^4}{1/n^4 + 1/n^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0).$$

Sei nun $\varphi \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Im Fall $\cos \varphi = 0$ ist $g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 0 \rightarrow 0 = g(0,0)$ für $r \rightarrow 0$. Im Fall $\cos \varphi \neq 0$ ergibt sich

$$g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi} = \frac{r \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + r^2 \sin^4 \varphi} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{0}{\cos^2 \varphi + 0} = 0 = g(0,0).$$

- c) Wegen $h(x,x) = 1 \rightarrow 1 \neq 0 = h(0,0)$ für $x \rightarrow 0$ ist die Funktion h in $(0,0)$ nicht stetig.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \frac{y^2}{y^2 + (1-y/x)^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{0}{0+1} = 0.$$

Folglich existiert $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} h(x,y)) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = h(0,0)$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert auch der andere iterierte Limes und hat den gleichen Wert.

Lösungen zu Aufgabe 2

Eine Funktion f lässt sich in $(0,0)$ stetig fortsetzen, wenn der Grenzwert $c := \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ existiert. Die stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f ist dann gegeben durch

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ c & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

- a) Diesmal ist $f(x, y)$ nur für $y \neq 0$ definiert. Wir betrachten daher eine Folge (x_k, y_k) in $\mathbb{R}^2$ mit $y_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $(x_k, y_k) \rightarrow (0, 0)$ für $k \rightarrow \infty$. Dann ergibt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$f(x_k, y_k) = \frac{1 - \cos(x_k y_k)}{y_k} = \begin{cases} x_k \cdot \frac{1 - \cos(x_k y_k)}{x_k y_k}, & x_k \neq 0, \\ 0, & x_k = 0. \end{cases}$$

Wegen $x_k y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ und $(1 - \cos t)/t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ (Man beachte $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \dots$. Alternativ kann man $(\cos t - 1)/t$ als Differenzenquotient von $g(t) := \cos t$ in 0 auffassen. Wegen $g'(t) = -\sin t$ erhält man dann $\lim_{t \rightarrow 0} (1 - \cos t)/t = -g'(0) = 0$. Mit Hilfe der Regel von de l'Hospital könnte man diesen Grenzwert natürlich auch berechnen.) erhält man $\frac{1 - \cos(x_k y_k)}{x_k y_k} \rightarrow 0$ und damit $f(x_k, y_k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, d.h. $f(x, y)$ konvergiert gegen 0 für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Die stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f in $(0, 0)$ ist deshalb gegeben durch

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- b) Wegen

$$|x^3 + y^3| \leq |x|^3 + |y|^3 \leq \max\{|x|, |y|\} \cdot |x|^2 + \max\{|x|, |y|\} \cdot |y|^2 = \max\{|x|, |y|\} \cdot (x^2 + y^2)$$

erhalten wir für $(x, y) \neq (0, 0)$

$$|f(x, y)| \leq \frac{\max\{|x|, |y|\} \cdot (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \max\{|x|, |y|\} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0,$$

d.h. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$, also ist die stetige Fortsetzung von f in $(0, 0)$ gegeben durch

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Alternativ: Es gelte $(x_k, y_k) \neq (0, 0)$ und $(x_k, y_k) \rightarrow (0, 0)$. Dann gibt es $r_k > 0$ und $\varphi_k \in \mathbb{R}$ mit $(x_k, y_k) = (r_k \cos \varphi_k, r_k \sin \varphi_k)$; dies ist die Darstellung der Folge in Polarkoordinaten. Dabei gilt $r_k^2 = r_k^2 (\cos^2 \varphi_k + \sin^2 \varphi_k) = x_k^2 + y_k^2$, also $r_k = \|(x_k, y_k)\| \rightarrow 0$. Somit hat man

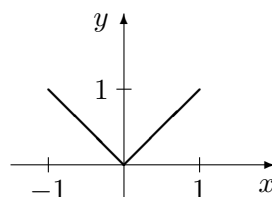
$$f(x_k, y_k) = \frac{r_k^3 \cos^3 \varphi_k + r_k^3 \sin^3 \varphi_k}{r_k^2} = r_k (\cos^3 \varphi_k + \sin^3 \varphi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

wegen der Beschränktheit von Sinus und Cosinus. Folglich ist $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

Lösungen zu Aufgabe 3

- a) Wegen $\gamma(t) = (t, |t|) = \begin{cases} (t, -t) & \text{für } t \in [-1, 0) \\ (t, t) & \text{für } t \in [0, 1] \end{cases}$ ist $\dot{\gamma}(t) = \begin{cases} (1, -1) & \text{für } t \in (-1, 0) \\ (1, 1) & \text{für } t \in (0, 1) \end{cases}$ und für die Länge der Kurve γ ergibt sich

$$L(\gamma) = \int_{-1}^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_{-1}^0 \|(1, -1)\| dt + \int_0^1 \|(1, 1)\| dt = \int_{-1}^1 \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}.$$

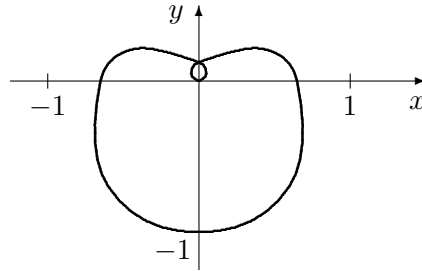


b) Für $\gamma(t) = (\sin^3(\frac{1}{3}t) \cos t, \sin^3(\frac{1}{3}t) \sin t) =: (x(t), y(t))$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3 \sin^2(\frac{1}{3}t) \cos(\frac{1}{3}t) \frac{1}{3} \cos t - \sin^3(\frac{1}{3}t) \sin t \\ &= \sin^2(\frac{1}{3}t) (\cos(\frac{1}{3}t) \cos t - \sin(\frac{1}{3}t) \sin t) = \sin^2(\frac{1}{3}t) \cos(\frac{4}{3}t), \end{aligned}$$

und genauso $y'(t) = \sin^2(\frac{1}{3}t) \sin(\frac{4}{3}t)$. Folglich ist die Länge der Kurve γ

$$\begin{aligned} \int_0^{6\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt &= \int_0^{6\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{\sin^4(\frac{1}{3}t) \cos^2(\frac{4}{3}t) + \sin^4(\frac{1}{3}t) \sin^2(\frac{4}{3}t)} dt \\ &= \int_0^{6\pi} \sin^2(\frac{1}{3}t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^{6\pi} \sin^2(\frac{1}{3}t) dt + \int_0^{6\pi} \cos^2(\frac{1}{3}t) dt \right) = \frac{1}{2} \int_0^{6\pi} 1 dt = \frac{6\pi}{2} = 3\pi. \end{aligned}$$



Bemerkung: Die Kurve wird bei der gegebenen Parametrisierung zweimal durchlaufen und zwar entgegen dem Uhrzeigersinn.

Lösungen zu Aufgabe 4

Eine Funktion f lässt sich in $(0,0)$ stetig fortsetzen, wenn der Grenzwert $c := \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ existiert. Die stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f ist dann gegeben durch

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ c & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} = \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{(x^2 + y^2 + 1) - 1} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1, \end{aligned}$$

und damit ergibt sich unmittelbar

$$f(x,y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1} + 1 = 2.$$

Also lässt sich f stetig in $(0,0)$ fortsetzen mit

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

b) Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x,0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{und} \quad f(x,x) = \frac{x^2}{e^{x^2} - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1,$$

d.h. bei unterschiedlicher Annäherung an den Nullpunkt erhält man verschiedene Werte. Folglich existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ nicht, so dass sich f nicht stetig in $(0,0)$ fortsetzen lässt.

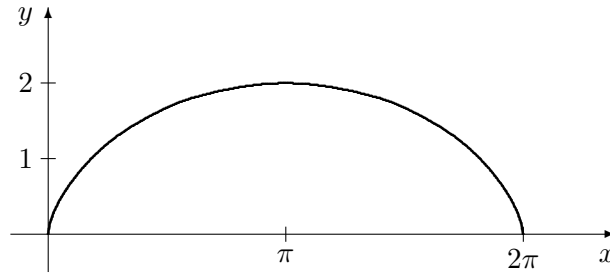
Lösungen zu Aufgabe 5

- a) Wir verwenden hier γ statt r . Es gilt $\dot{\gamma}(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ und damit

$$\begin{aligned}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2 \cos t \\ &= 2\left(1 - \cos\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t\right)\right) = 2\left(1 - \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right) = 4 \sin^2\left(\frac{1}{2}t\right).\end{aligned}$$

Definitionsgemäß ist also

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2|\sin(\frac{1}{2}t)| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin(\frac{1}{2}t) dt = -4 \cos(\frac{1}{2}t) \Big|_{t=0}^{2\pi} = 8.$$



Bemerkung: Diese Kurve heißt Zykloide. Sie ist die Bahn, die ein Kreispunkt beim Abrollen eines Kreises auf einer Geraden beschreibt.

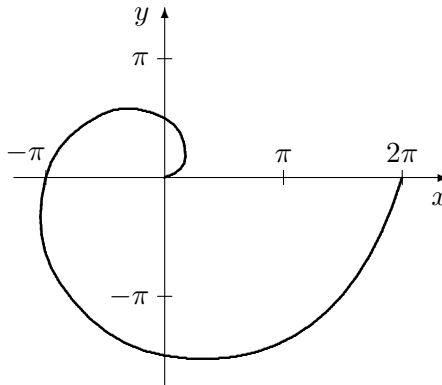
- b) Wir verwenden hier r statt z . Hier befinden wir uns in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, welche wir als $\mathbb{R}^2$ auffassen. Wegen $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ist die Kurve $\vec{r}(\varphi) = (\varphi \cos \varphi, \varphi \sin \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, in $\mathbb{R}^2$ gemeint.

Wegen $\vec{r}'(\varphi) = (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi, \sin \varphi + \varphi \cos \varphi)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\vec{r}'(\varphi)\|^2 &= (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)^2 + (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi)^2 \\ &= \cos^2 \varphi - 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi + \varphi^2 \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi + \varphi^2 \cos^2 \varphi \\ &= 1 + \varphi^2\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}L(\vec{r}) &= \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(\varphi)\| d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + \varphi^2} + \sqrt{1 + \varphi^2}}{2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \varphi^2}{\sqrt{1 + \varphi^2}} + \sqrt{1 + \varphi^2} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}} + \frac{\varphi^2}{\sqrt{1 + \varphi^2}} + \sqrt{1 + \varphi^2} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{Arsinh} \varphi + \varphi \sqrt{1 + \varphi^2} \right) \Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{\operatorname{Arsinh} 2\pi}{2} + \pi \sqrt{1 + 4\pi^2}.\end{aligned}$$



Bemerkung: Diese Kurve heißt Archimedische Spirale.

Lösungen zu Aufgabe 6

- a) Wir verwenden hier γ statt r . Für $-1 < t < 1$ gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t^2} \\ 1 \\ -t/\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

Für $t_0 \in (-1, 1)$ ist daher

$$\gamma(t_0) + \lambda \dot{\gamma}(t_0) = \begin{pmatrix} \arcsin t_0 \\ t_0 \\ \sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t_0^2} \\ 1 \\ -t_0/\sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt $\gamma(t_0)$.

- b) Für $t \in [-1, 1]$ haben wir

$$s(t) := \int_{-1}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau = \int_{-1}^t \sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}} d\tau = \sqrt{2} \arcsin \tau \Big|_{\tau=-1}^t = \sqrt{2} \left(\arcsin t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Folglich hat die Kurve γ die Länge $L(\gamma) = s(1) = \sqrt{2} \pi$. Wegen

$$\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} = \arcsin t, \quad \text{also} \quad t = t(s) = \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}s - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}s\right)$$

lautet eine Darstellung von γ bezüglich der Bogenlänge (oder natürliche Parametrisierung)

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}s - \frac{\pi}{2} \\ -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}s) \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}s) \end{pmatrix}, \quad s \in [0, \sqrt{2}\pi].$$