Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
19.05.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Lösungen zu Aufgabe 1: Der Tangentenvektor im Punkt $\gamma(t)$ lautet

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) \\ -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Für die Bogenlänge (in Abängigkeit von $t \in [0,\infty)$) ergibt sich

$$\begin{aligned} s(t) := \int_0^t ||\dot\gamma(\tau)||d\tau &= \int_0^t \sqrt{(-e^{-\tau}\cos(\tau) - e^{-\tau}\sin(\tau))^2 + (-e^{-\tau}\sin(\tau) + e^{-\tau}\cos(\tau))^2 + e^{-2\tau}}d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{3}e^{-\tau}d\tau = \sqrt{3}(1-e^{-t}), \end{aligned}$$

also gilt für die Länge der Kurve $L(\gamma) = s(\infty) = \sqrt{3}$. Wegen $t = t(s) = \ln(1-\frac{s}{\sqrt{3}})^{-1}$ ist die Darstellung bezüglich der Bogenlänge (bzw. die natürliche Parametrisierung) gegeben durch

$$\tilde\gamma(s) = \gamma(t(s)) = \begin{pmatrix} (1-\frac{s}{\sqrt{3}})\cos(\ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-s}) \\ (1-\frac{s}{\sqrt{3}})\sin(\ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-s}) \\ (1-\frac{s}{\sqrt{3}}) \end{pmatrix} \qquad (s \in [0,\sqrt{3})).$$

Lösungen zu Aufgabe 2: a) Bei der Funktion f ergibt sich für eine Richtung $v = (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wegen $f(0,0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,tv_2)}{t}.$$

Ist v so gewählt, dass $v_1v_2 \geq 0$ gilt, dann hat man $tv_1\cdot tv_2 \geq 0$ für alle $t \neq 0$ und damit nach Definition von f

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{tv_1}{t} = v_1.$$

Ist dagegen $v_1v_2 < 0$, so erhält man $tv_1 \cdot tv_2 < 0$ für alle $t \neq 0$, also

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{tv_1+tv_2}{t} = v_1+v_2.$$

Für die Funktion f existieren folglich alle Richtungsableitungen im Punkt $(0,0)$.

b) Wir bestimmen zunächst $f'(x_0,y_0)$. Da f in (x_0,y_0) differenzierbar ist, gilt

$$f'(x_0,y_0)u = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0) = -1 \qquad \text{und} \qquad f'(x_0,y_0)v = \frac{\partial f}{\partial v}f(x_0,y_0) = 2.$$

Setzen wir abkürzend $\alpha := f_x(x_0, y_0)$ und $\beta := f_y(x_0, y_0)$, so ist $f'(x_0, y_0) = (\alpha\ \beta)$, also $f'(x_0, y_0)u = \alpha + 2\beta$ und $f'(x_0, y_0)v = -\alpha + \beta$. Obige Gleichungen liefern daher

$$\alpha + 2\beta = -1 \qquad \text{und} \qquad -\alpha + \beta = 2\,.$$

Hieraus erhält man durch Addieren $3\beta = 1$, also $\beta = \frac{1}{3}$, und damit $\alpha = -\frac{5}{3}$. Folglich ist $f'(x_0, y_0) = (-\frac{5}{3}\ \ \frac{1}{3})$ und aufgrund der Differenzierbarkeit von f in (x_0, y_0) ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0, y_0) = f'(x_0, y_0)w = \left(-\tfrac{5}{3}\quad \tfrac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -\tfrac{4}{3}\,.$$

Wie wir aus der Vorlesung wissen, ist die gesuchte Richtung h gegeben durch

$$h = \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}.$$

Lösungen zu Aufgabe 3: a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig; wir müssen also nur noch die Stetigkeit in $(0,0)$ nachweisen: Wegen

$$\left|\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| = \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \le \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

gilt $|f(x,y)| \le |xy|$ und damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy\,\frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}\,, \end{aligned}$$

und wegen $f(x,y) = -f(y,x)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-f(y+h, x) + f(y,x)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{f(y+h, x) - f(y,x)}{h} = -f_x(y,x) = -\frac{y^4x + 4y^2x^3 - x^5}{(y^2 + x^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix}f_x(x,y)\\f_y(x,y)\end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\begin{pmatrix}x^4y + 4x^2y^3 - y^5\\x^5 - 4x^3y^2 - xy^4\end{pmatrix}.$$

Für die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt erhalten wir

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0 - 0}{h} = 0$$

und

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0, 0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0 - 0}{h} = 0\,.$$

Somit ist $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

c) Es ist

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h^5 - 0 - 0}{(h^2 + 0)^2} = 1$$

sowie

$$f_{yx}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0 + 0 - h^5}{h(0 + h^2)^2} = -1\,.$$

d) Wie wir wissen, gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^4y + 4x^2y^3 - y^5 \\ x^5 - 4x^3y^2 - xy^4 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dort existieren also die partiellen Ableitungen erster Ordnung und sind stetig, d. h. f ist dort stetig partiell differenzierbar. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies die Differenzierbarkeit von f impliziert. Die Ableitung ist

$$f'(x,y) = \big(\operatorname{grad} f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^4y + 4x^2y^3 - y^5 & x^5 - 4x^3y^2 - xy^4 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist bekannt: $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ sei $z := \max\{|x|,|y|\}$. Es gilt

$$|f_x(x,y)| = \frac{|x^4y + 4x^2y^3 - y^5|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{z^5 + 4z^5 + z^5}{(z^2)^2} = 6z = 6\max\{|x|,|y|\}.$$

Damit folgt $f_x(x,y) \to 0 = f_x(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$. Genauso sieht man ein, dass f_y in $(0,0)$ stetig ist. Also ist f in $(0,0)$ stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar, und es gilt $f'(0,0) = (0\ 0)$.

e) Die Funktion f kann nicht zweimal stetig differenzierbar sein, denn sonst müssten f_{yx} und f_{xy} nach dem Satz von Schwarz übereinstimmen, was aber nach **c)** nicht der Fall ist.

Lösungen zu Aufgabe 4: a) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \big(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\ x^2e^y + \sin x\big) =: (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$.

Da die partiellen Ableitungen von f

$$\begin{aligned}
(f_1)_x(x,y,z) &= y^2z^3e^{xy^2z^3} + xy^2z^3e^{xy^2z^3}y^2z^3 = y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
(f_1)_y(x,y,z) &= 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
(f_1)_z(x,y,z) &= 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
(f_2)_x(x,y,z) &= 2xe^y + \cos x,\\
(f_2)_y(x,y,z) &= x^2e^y,\\
(f_2)_z(x,y,z) &= 0
\end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^3$ stetig sind, ist f stetig partiell differenzierbar und damit auch differenzierbar. Für die Ableitung von f ergibt sich

$$\begin{aligned}
f'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} (f_1)_x(x,y,z) & (f_1)_y(x,y,z) & (f_1)_z(x,y,z) \\ (f_2)_x(x,y,z) & (f_2)_y(x,y,z) & (f_2)_z(x,y,z) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} \\ 2xe^y + \cos x & x^2e^y & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \big(ye^x + x\sinh y,\ y^4 + 3x^2\sin y,\ 4y - x^3\big)$

Auch hier sind sämtliche partiellen Ableitungen von f stetig, so dass f differenzierbar ist mit

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x + \sinh y & e^x + x\cosh y \\ 6x\sin y & 4y^3 + 3x^2\cos y \\ -3x^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

c) $f\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}^3,\ f(r,\varphi,\theta) = \big(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta\big)$

Wiederum ist f stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar. Die Ableitung von f lautet

$$f'(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad (r,\varphi,\theta) \in (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2).$$

Bemerkung: Es gilt $\det f'(r,\varphi,\theta) = r^2\cos\theta$ ($\to$ Kugelkoordinaten).

d) $f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(w,x,y,z)=x^y$

Wegen $x^y=e^{y\ln x}$ gilt $f_x(w,x,y,z)=e^{y\ln x}y/x$ und $f_y(w,x,y,z)=e^{y\ln x}\ln x$. Folglich ist

$$f'(w,x,y,z)=\begin{pmatrix}0 & yx^{y-1} & x^y\ln x & 0\end{pmatrix},\quad (w,x,y,z)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2.$$

Lösungen zu Aufgabe 5: a) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig; es bleibt noch der Nullpunkt zu prüfen. Ist $(x,y)\neq(0,0)$ und $z:=\max\{|x|,|y|\}$, so gilt

$$|f(x,y)|=\left|\frac{y^3-x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|y^3|+|x^2y|}{x^2+y^2}\le\frac{z^3+z^3}{z^2}=2z=2\max\{|x|,|y|\},$$

und damit folgt $f(x,y)\to 0=f(0,0)$ für $(x,y)\to(0,0)$.

b) Für $(x,y)\neq(0,0)$ gilt

$$f_x(x,y)=\frac{-2xy(x^2+y^2)-(y^3-x^2y)2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-4xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y(x,y)=\frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)-(y^3-x^2y)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ haben wir also

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\begin{pmatrix}f_x(x,y)\\f_y(x,y)\end{pmatrix}=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}-4xy^3\\-x^4+4x^2y^2+y^4\end{pmatrix}.$$

Nun noch zum Nullpunkt: Definitionsgemäß gilt

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

und

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h^3-0}{0+h^2}=1.$$

Somit ist f auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar mit

$$\operatorname{grad} f(0,0)=\begin{pmatrix}f_x(0,0)\\f_y(0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

c) Wegen

$$f_x(x,x)=\frac{-4x^4}{(x^2+x^2)^2}=-1\xrightarrow{x\to0}-1\neq0=f_x(0,0),$$
$$f_y(x,0)=\frac{-x^4+0+0}{(x^2+0)^2}=-1\xrightarrow{x\to0}-1\neq1=f_y(0,0)$$

ist weder f_x noch f_y im Punkt $(0,0)$ stetig.

d) Es sei $v=(v_1,v_2)\neq(0,0)$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f((0,0)+hv)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(hv_1,hv_2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(hv_2)^3-(hv_1)^2hv_2}{(hv_1)^2+(hv_2)^2}=\lim_{h\to0}\frac{h^3v_2^3-h^3v_1^2v_2}{h^3(v_1^2+v_2^2)}=\lim_{h\to0}\frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2}=\frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Dies soll nun mit

$$(\operatorname{grad} f(0,0))\cdot v=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=v_2$$

verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2}=v_2\iff v_2^3-v_1^2v_2=v_2(v_1^2+v_2^2)\iff 2v_1^2v_2=0.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1=0$ oder $v_2=0$ ist.

e) Nicht für alle Richtungen v gilt die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\operatorname{grad} f(0,0)) \cdot v$. Folglich kann die Funktion f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste die Gleichung für alle Richtungen gelten. Da die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell differenzierbar, also auch differenzierbar mit

$$f'(x,y) = \big(\operatorname{grad} f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} -4xy^3 & -x^4+4x^2y^2+y^4 \end{pmatrix}.$$

Lösungen zu Aufgabe 6: a) Für die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ gilt

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin(|t|^{-1})-0}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin(|t|^{-1}) = 0,$$

weil $\sin(|t|^{-1})$ beschränkt ist, und aufgrund von $f(x,y) = f(y,x)$ ist $f_y(0,0) = f_x(0,0) = 0$.

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $(0,0)$, wenn es eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, also $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, gibt mit

$$\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-A\binom{h_1}{h_2}|}{\|\binom{h_1}{h_2}-\binom{0}{0}\|} \xrightarrow{\binom{h_1}{h_2}\to\binom{0}{0}} 0\,. \qquad (*)$$

Wegen $f_x(0,0) = 0$ und $f_y(0,0) = 0$ ist $A = (0 \;\; 0)$ unser Kandidat für die Ableitung von f in $(0,0)$. In der Tat ist $(*)$ für dieses A erfüllt, denn es gilt $f(0,0) = 0$ und $A\binom{h_1}{h_2} = 0$ sowie

$$\frac{|f(h_1,h_2)|}{\|\binom{h_1}{h_2}\|} = \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \|\tbinom{h_1}{h_2}\|\sin\frac{1}{\|\binom{h_1}{h_2}\|} \xrightarrow{\binom{h_1}{h_2}\to\binom{0}{0}} 0\,.$$

b) Für die partielle Ableitung von f nach x ergibt sich im Fall $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x\sin(x^2+y^2)^{-1/2} + (x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot(-\tfrac{1}{2})(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot 2x \\ &= 2x\sin(x^2+y^2)^{-1/2} - x(x^2+y^2)^{-1/2}\cos(x^2+y^2)^{-1/2}\,. \end{aligned}$$

Damit hat man für $x \neq 0$

$$f_x(x,0) = 2x\sin(|x|^{-1}) - x|x|^{-1}\cos(|x|^{-1})\,.$$

Ist $x_k := \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, gesetzt, so strebt $x_k \to 0$ für $k \to \infty$, allerdings konvergiert $f_x(x_k,0) = 2\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi) - \cos(k\pi) = -(-1)^k$ für $k \to \infty$ nicht. Folglich ist f_x in $(0,0)$ nicht stetig. Aus Symmetriegründen ($f(x,y) = f(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) gilt dies auch für f_y.

Bemerkung: Die Funktion f ist ein Beispiel für eine Funktion, die differenzierbar ist, jedoch nicht stetig partiell differenzierbar ist. Wenn man also weiß, dass eine Funktion nicht stetig partiell differenzierbar ist, dann kann man keine Aussage über Differenzierbarkeit treffen.