Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
26.05.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Lösungen zu Aufgabe 1: Wir beginnen mit dem Fall $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} \leq 1$. Es ist

$$f(y^{\delta/\gamma}, y) = \frac{y^{\frac{\delta\alpha}{\gamma}+\beta}}{2y^\delta}.$$

Wegen $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta} \leq 1$ ist $\frac{\delta\alpha}{\gamma}+\beta \leq \delta$ und damit konvergiert $f(y^{\delta/\gamma}, y)$ nicht gegen 0 für $y \to 0$. Dementsprechend kann $f(0,0) = 0$ keine stetige Fortsetzung in $(0,0)$ sein.

Sei nun $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} > 1$. Wir beginnen mit den Fällen α oder $\beta = 0$, wobei wir nur $\alpha = 0$ betrachten ($\beta = 0$ geht analog). Dann $\beta > \delta$ und wir erhalten

$$|f(x,y)| = \frac{|y|^\beta}{|x|^\gamma + |y|^\delta} \leq |y|^{\beta-\delta} \to 0 \quad (\text{für } (x,y) \to (0,0)).$$

Nun seien $\alpha, \beta > 0$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\frac{\beta}{\delta} + \frac{\alpha}{\gamma} + \varepsilon\frac{\alpha}{\gamma}(\frac{\beta}{\delta} - 1) > 1$ ist und setzen $p = \frac{\gamma}{\alpha} + \varepsilon$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Dann gelten (nachrechnen!)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \alpha p > \gamma, \quad \beta q > \delta.$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Ungleichung, welche ϵ erfüllt. Die Youngsche Ungleichung liefert nun

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{p}\frac{|x|^{\alpha p}}{|x|^\gamma + |y|^\delta} + \frac{1}{q}\frac{|y|^{\beta q}}{|x|^\gamma + |y|^\delta} \to 0 \quad (\text{für } (x,y) \to (0,0)).$$

Lösungen zu Aufgabe 2: Klar: In beiden Fällen sind die Funktionen stetig differenzierbar (sogar C^∞).

a) Es gilt $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & -\sin(y)\cos(\cos(y)) \end{pmatrix}$.

Damit ist $f'(x,y)$ regulär $\Leftrightarrow \det f'(x,y) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ und $y \notin \pi\mathbb{Z}$.

Wenn $f'(x,y)$ regulär ist, so liefert der Umkehrsatz lokale Invertierbarkeit. Sei nun $\vec{v} = (0,y)$ gegeben, wobei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $f(\vec{v}+\varepsilon e_1) = f(\vec{v}-\varepsilon e_1)$ für alle $\varepsilon > 0$ ist f auf jeder offenen Umgebung, welche $\vec{v}$ enthält nicht injektiv und damit auch nicht lokal invertierbar an diesen Stellen.

Die Funktion $\sin(\cos(y))$ nimmt aufgrund ihrer 2π-Periodizität und Stetigkeit ihr Maximum und Minimum an. An diesen Stellen ist notwendigerweise die Ableitung gleich 0. Im Intervall $I = (-\pi, \pi]$ gibt es aber nur zwei Stellen an denen, die Ableitung gleich 0 ist, nämlich $y_1 = 0$ und $y_2 = \pi$. Die Funktionswerte sind $\sin(1)$ und $\sin(-1)$ und damit globales Maximum/Minimum. Sei nun $\vec{v} = (x,z)$ wobei $z \in \pi\mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$. Sei nun U eine offene Umgebung, welche $f(\vec{v})$ enthält. In U gibt es also Punkte, an welchen die zweite Komponente betragsmäßig größer als $|\sin(1)| = |\sin(-1)|$ ist. Dieser Punkte können aber nicht im Wertebereich von f liegen und damit kann f nicht lokal invertierbar sein.

b) Wir haben $g'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 3y^2 \\ e^x & 0 \end{pmatrix}$. Es ist $g'(x,y)$ regulär genau dann wenn $\det g'(x,y) \neq 0$, also genau dann wenn $e^x 3y^2 \neq 0$, d.h. genau dann wenn $y \neq 0$. Das heißt, wann immer $y \neq 0$ ist, ist g an der

Stelle (x, y) lokal invertierbar (Umkehrsatz). Wir untersuchen nun den Fall $y = 0$. Wir bemerken, dass der Term y^3 auftaucht, der für die Nullstelle der Ableitung bei 0 verantwortlich ist. Da diese Funktion als Funktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (global) invertierbar bzw. bijektiv ist, besteht Hoffnung das die (zumindest lokale) Invertierbarkeit gilt. Tatsächlich kann man sogar die globale Invertierbarkeit zeigen. Dazu sollte man sich zunächst klar machen, wie $g(\mathbb{R}^2)$ aussieht. Klar ist, dass die zweite Komponente von g nur Werte >0 aufweist. In der ersten Komponente sind hingegen alle Werte möglich, da y^3 alle Werte annimmt. Wir zeigen nun, dass $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times (0, \infty)$ bijektiv ist. Sei $(v_1, v_2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ Es gilt

$$x + y^3 = v_1,\ e^x = v_2 \Leftrightarrow x = \ln(v_2),\ y = \sqrt[3]{v_1 - \ln(v_2)},$$

also ist $h\colon \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $h(x, y) = \begin{pmatrix} \ln(y) \\ \sqrt[3]{x - \ln(y)} \end{pmatrix}$ die Umkehrfunktion zu g (was man auch leicht direkt überprüfen kann).

Lösungen zu Aufgabe 3: Offensichtlich besitzen alle drei Funktionen stetige partielle Ableitungen und sind damit differenzierbar. Für $\vec{f}$ mit den Komponentenfunktionen $f_1(x, y) := x^2$ und $f_2(x, y) := y^2$ gilt daher

$$\vec{f}\,'(x, y) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x, y) & D_2 f_1(x, y) \\ D_1 f_2(x, y) & D_2 f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

und ebenso ergibt sich

$$\vec{g}\,'(x, y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{h}\,'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ \cosh x & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel kommen wir dann auf

$$\begin{aligned}(\vec{g} \circ \vec{f})'(x, y) = \vec{g}\,'\big(\vec{f}(x, y)\big)\, \vec{f}\,'(x, y) &= \begin{pmatrix} y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Für die Funktion $\vec{h} \circ \vec{g}$ erhält man

$$\begin{aligned}(\vec{h} \circ \vec{g})'(x, y) &= \vec{h}\,'\big(\vec{g}(x, y)\big)\, \vec{g}\,'(x, y) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & -e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ \cosh(\sin(xy)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

und Ausmultiplizieren liefert für $(\vec{h} \circ \vec{g})'(x, y)$ die $(2, 2)$-Matrix

$$= \begin{pmatrix} \big(y\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} & \big(x\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\vec{g} \circ \vec{f}(x, y) = \vec{g}(\vec{f}(x, y)) = \vec{g}(x^2, y^2) = \big(\sin(x^2y^2),\ e^{x^2+y^2}\big) =: (u_1(x, y), u_2(x, y))$$

erhalten wir

$$(\vec{g} \circ \vec{f})'(x, y) = \begin{pmatrix} D_1 u_1(x, y) & D_2 u_1(x, y) \\ D_1 u_2(x, y) & D_2 u_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$\vec{h} \circ \vec{g}(x, y) = \vec{h}(\vec{g}(x, y)) = \vec{h}\big(\sin(xy),\ e^{x+y}\big) = \big(e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}), \sinh(\sin(xy))\big) =: (v_1(x, y), v_2(x, y))$$

und für die Ableitung ergibt sich

$$(\vec{h} \circ \vec{g})'(x, y) = \begin{pmatrix} D_1 v_1(x, y) & D_2 v_1(x, y) \\ D_1 v_2(x, y) & D_2 v_2(x, y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \big(y\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} & \big(x\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

Lösungen zu Aufgabe 4: Im folgenden schreiben wir nur f_x bzw. f_y anstelle von $D_1 f$ bzw. $D_2 f$. Ebenso kürzen wir partielle Ableitungen höherer Ordnung ab, z.B. $f_{xy} := (f_x)_y$ anstatt $D_2 D_1 f := D_2(D_1 f)$, etc.

a) Für $r > 0$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$ gilt

$$v(r,\phi) = u(r\cos\phi, r\sin\phi) = u(g(r,\phi)) = (u \circ g)(r,\varphi)$$

mit $g\colon (0,\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $g(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$v'(r,\phi) = u'(g(r,\phi))\, g'(r,\phi) = \begin{pmatrix} u_x(g(r,\phi)) & u_y(g(r,\phi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Wegen $v'(r,\phi) = \begin{pmatrix} v_r(r,\phi) & v_\phi(r,\phi) \end{pmatrix}$ erhält man für die partiellen Ableitungen von v

$$\begin{aligned} v_r(r,\phi) &= \cos\phi\, u_x(r\cos\phi, r\sin\phi) + \sin\phi\, u_y(r\cos\phi, r\sin\phi), \\ v_\phi(r,\phi) &= -r\sin\phi\, u_x(r\cos\phi, r\sin\phi) + r\cos\phi\, u_y(r\cos\phi, r\sin\phi). \end{aligned}$$

b) Nach einer ähnlichen Rechnung wie in **a)** sieht man

$$\begin{aligned} v_{rr}(r,\phi) &= \cos\phi\,\big(u_{xx}(r\cos\phi, r\sin\phi)\,\cos\phi + u_{xy}(r\cos\phi, r\sin\phi)\,\sin\phi\big) \\ &\quad + \sin\phi\,\big(u_{yx}(r\cos\phi, r\sin\phi)\,\cos\phi + u_{yy}(r\cos\phi, r\sin\phi)\,\sin\phi\big) \\ &\overset{(*)}{=} \cos^2\phi\, u_{xx}(r\cos\phi, r\sin\phi) + 2\sin\phi\,\cos\phi\, u_{xy}(r\cos\phi, r\sin\phi) + \sin^2\phi\, u_{yy}(r\cos\phi, r\sin\phi) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} v_{\phi\phi}(r,\phi) &= -r\cos\phi\, u_x(r\cos\phi, r\sin\phi) \\ &\quad - r\sin\phi\,\big(u_{xx}(r\cos\phi, r\sin\phi)\,(-r\sin\phi) + u_{xy}(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\cos\phi\big) \\ &\quad - r\sin\phi\, u_y(r\cos\phi, r\sin\phi) \\ &\quad + r\cos\phi\,\big(u_{yx}(r\cos\phi, r\sin\phi)\,(-r\sin\phi) + u_{yy}(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\cos\phi\big) \\ &\overset{(*)}{=} -r\cos\phi\, u_x(r\cos\phi, r\sin\phi) - r\sin\phi\, u_y(r\cos\phi, r\sin\phi) \\ &\quad + r^2\sin^2\phi\, u_{xx}(r\cos\phi, r\sin\phi) - 2r^2\sin\phi\,\cos\phi\, u_{xy}(r\cos\phi, r\sin\phi) \\ &\quad + r^2\cos^2\phi\, u_{yy}(r\cos\phi, r\sin\phi). \end{aligned}$$

[Zu $(*)$: Nach dem Satz von Schwarz gilt für die zweimal stetig differenzierbare Funktion u: $u_{xy} = u_{yx}$.]
Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}(r,\phi) &= v_{rr}(r,\phi) + \frac{1}{r}\, v_r(r,\phi) + \frac{1}{r^2}\, v_{\phi\phi}(r,\phi) \\ &= (\sin^2\phi + \cos^2\phi)\big(u_{xx}(r\cos\phi, r\sin\phi) + u_{yy}(r\cos\phi, r\sin\phi)\big) \\ &= \Delta u(r\cos\phi, r\sin\phi) = \Delta u(x,y) \end{aligned}$$

mit $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$.

Lösungen zu Aufgabe 5: a) Der Umkehrsatz liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Funktion g muss stetig differenzierbar sein, es muss $g(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{4})$ gelten, und die Matrix $g'(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ muss regulär sein. Überprüfen wir diese Voraussetzungen: Die stetige Differenzierbarkeit ist offensichtlich. Weiter ist

$$g(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\ln 2)\,\cos\frac{\pi}{2} \\ \sinh(\ln 2)\,\sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Schließlich gilt

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh x\,\cos y & -\cosh x\,\sin y \\ \cosh x\,\sin y & \sinh x\,\cos y \end{pmatrix},$$

und damit ist

$$g'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\ln 2) \\ \cosh(\ln 2) & 0 \end{pmatrix}$$

regulär, denn $\cosh(\ln 2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$.

Nach dem Umkehrsatz gilt

$$\big(g^{-1}\big)'(0, \tfrac{3}{4}) = \big(g'(g^{-1}(0, \tfrac{3}{4}))\big)^{-1} = \big(g'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2})\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Funktion g ist überall stetig differenzierbar und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\det g'(x, y) = (\sinh x \, \cos y)^2 + (\cosh x \, \sin y)^2 \,.$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn $\sinh x \, \cos y = 0$ und $\cosh x \, \sin y = 0$ gilt. Für $x > 0$ ist dies gleichbedeutend mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, kann also nie eintreten. Folglich ist für $x > 0$ die Matrix $g'(x, y)$ stets regulär. Der Umkehrsatz liefert nun die lokale Invertierbarkeit.

Die Funktion g ist aber nicht injektiv wegen $g(x, y + 2\pi) = g(x, y)$.