

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Lösungen zu Aufgabe 1: Die behauptete Auflösbarkeit folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn wir

$$f(0, -2, 1) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, -2, 1) \neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := z^3 + 7z^2 - 3xyz + x^5 + y^3$, überprüft haben. Es gilt $f(0, -2, 1) = 1 + 7 + (-2)^3 = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 + 14z - 3xy, \quad \text{also} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, -2, 1) = 3 + 14 = 17 \neq 0,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x, y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x, y)}(x, y, g(x, y)) \\ &= -\frac{1}{3g(x, y)^2 + 14g(x, y) - 3xy} \begin{pmatrix} -3yg(x, y) + 5x^4 & -3xg(x, y) + 3y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 2: Für die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos(x) \sin(y) e^{x-y}$, gilt

$f(x, y)$	$= e^{x-y} \cos x \sin y$	$\Rightarrow$	$f(0, 0)$	$=$	0
$f_x(x, y)$	$= e^{x-y} (\cos x \sin y - \sin x \sin y)$	$\Rightarrow$	$f_x(0, 0)$	$=$	0
$f_y(x, y)$	$= e^{x-y} (\cos x \cos y - \cos x \sin y)$	$\Rightarrow$	$f_y(0, 0)$	$=$	1
$f_{xx}(x, y)$	$= e^{x-y} (-2 \sin x \sin y)$	$\Rightarrow$	$f_{xx}(0, 0)$	$=$	0
$f_{xy}(x, y)$	$= e^{x-y} (\sin x \sin y - \sin x \cos y - \cos x \sin y + \cos x \cos y)$	$\Rightarrow$	$f_{xy}(0, 0)$	$=$	1
$f_{yy}(x, y)$	$= e^{x-y} (-2 \cos x \cos y)$	$\Rightarrow$	$f_{yy}(0, 0)$	$=$	-2
$f_{xxx}(x, y)$	$= e^{x-y} (-2 \cos x \sin y - 2 \sin x \sin y)$	$\Rightarrow$	$f_{xxx}(0, 0)$	$=$	0
$f_{xxy}(x, y)$	$= e^{x-y} (-2 \sin x \cos y + 2 \sin x \sin y)$	$\Rightarrow$	$f_{xxy}(0, 0)$	$=$	0
$f_{xyy}(x, y)$	$= e^{x-y} (2 \sin x \sin y - 2 \cos x \cos y)$	$\Rightarrow$	$f_{xyy}(0, 0)$	$=$	-2
$f_{yyy}(x, y)$	$= e^{x-y} (2 \cos x \sin y + 2 \cos x \cos y)$	$\Rightarrow$	$f_{yyy}(0, 0)$	$=$	2

Damit ist für $h = (h_1, h_2)$

$$\begin{aligned} T_{3,(0,0)}(h) &= f(0, 0) + \frac{1}{1!} (h \cdot \nabla) f(0, 0) + \frac{1}{2!} (h \cdot \nabla)^2 f(0, 0) + \frac{1}{3!} (h \cdot \nabla)^3 f(0, 0) \\ &= f(0, 0) + \sum_{j=1}^2 h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0, 0) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0, 0) + \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^2 h_j h_k h_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(0, 0) \\ &= 0 + h_2 + \frac{1}{2} (h_1 h_2 + h_2 h_1 + h_2^2 (-2)) + \frac{1}{6} (h_1 h_2 h_2 (-2) + h_2 h_1 h_2 (-2) + h_2 h_2 h_1 (-2) + h_2^3 2) \\ &= h_2 + h_1 h_2 - h_2^2 - h_1 h_2^2 + \frac{1}{3} h_2^3. \end{aligned}$$

Schreiben wir $(x, y) = h + x^0 = h$, so erhalten wir

$$T_{3,(0,0)}(x, y) = y + xy - y^2 - xy^2 + \frac{1}{3} y^3.$$

Lösungen zu Aufgabe 3: a) Die behauptete Auflösbarkeit folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn wir

$$f(0, 0, -2) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, -2) \neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$, überprüft haben. Es gilt $f(0, 0, -2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 + 4z - 3xy, \quad \text{also} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, -2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x, y) &= - \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial (x, y)}(x, y, g(x, y)) \\ &= - \frac{1}{3g(x, y)^2 + 4g(x, y) - 3xy} \begin{pmatrix} -3yg(x, y) + 3x^2 & -3xg(x, y) - 3y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von $(0, 0, 1, 1)$ durch die Gleichung

$$f(x, y, u, v) = \vec{0}, \quad \text{mit} \quad f(x, y, u, v) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen u und v definiert werden. Offenbar ist $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass $f(0, 0, 1, 1) = \vec{0}$ gilt; die ersten zwei Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix $\frac{\partial f}{\partial (u, v)}(0, 0, 1, 1)$ regulär ist. Wegen

$$f'(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad \frac{\partial f}{\partial (u, v)}(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

und damit $\frac{\partial f}{\partial (u, v)}(0, 0, 1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist tatsächlich regulär, denn $\det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$. Also gibt es zwei offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(0, 0) \in U$, $(1, 1) \in V$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g: U \rightarrow V$ mit $f(x, y, u, v) = \vec{0} \Leftrightarrow (u, v) = g(x, y)$. Wir setzen $\tilde{u}(x, y) = g_1(x, y)$ und $\tilde{v}(x, y) = g_2(x, y)$. Es gilt

$$g'(x, y) = - \left(\frac{\partial f}{\partial (u, v)}(x, y, g(x, y)) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial (x, y)}(x, y, g(x, y))$$

Wegen $g(0, 0) = (1, 1)$ gilt damit

$$g'(0, 0) = - \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von $\tilde{u}, \tilde{v}$ verschwinden.

Lösungen zu Aufgabe 4: Das zweite Taylorpolynom von f in $x^0 = (1, -1, 0)$ ist gegeben durch

$$T_{2, x^0}(h) = f(x^0) + \nabla f(x^0) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(x^0) h.$$

Für die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^z - y^2$, ergibt sich

$$f_x(x, y, z) = e^z, \quad f_y(x, y, z) = -2y, \quad f_z(x, y, z) = xe^z.$$

Damit erhalten wir $f_x(1, -1, 0) = 1$, $f_y(1, -1, 0) = 2$ und $f_z(1, -1, 0) = 1$. Weiter gilt

$$f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{xz} = e^z, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zz} = xe^z.$$

Insgesamt ergibt sich

$$f(x^0) = 0, \quad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$T_{2,x^0}(h_1, h_2, h_3) = 0 + h_1 + 2h_2 + h_3 + \frac{1}{2}(-2h_2^2 + h_3^2 + 2h_1h_3) = h_1 + 2h_2 + h_3 - h_2^2 + \frac{1}{2}h_3^2 + h_1h_3.$$

Schreibt man $h = (x, y, z) - x^0 = (x - 1, y + 1, z)$, so erhält man

$$(x - 1) + 2(y + 1) + z - (y + 1)^2 + \frac{1}{2}z^2 + (x - 1)z.$$

Lösungen zu Aufgabe 5: Es ist $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und

$$g'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & f'(v) \\ f'(u) & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\det g'(u, v) = 1 - f'(u)f'(v) > 0$ für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, denn $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ nach Voraussetzung. Der Umkehrsatz liefert nun die Behauptung.