Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
09.06.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Lösungen zu Aufgabe 1: Da Q abgeschlossen und beschränkt ist und f auf Q stetig ist, nimmt f nach dem Satz in 19.18 auf Q Maximum und Minimum an.

Wir betrachten f zunächst im Inneren von Q, also auf $(0,5)\times(0,5)$. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - 4y - 4x \\ x^2 - 4x + 4 \end{pmatrix}.$$

Gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, so liefert die zweite Komponente $(x-2)^2 = 0$, d.h. $x = 2$. Für $x = 2$ lautet die erste Komponente -8. Diese ist stets $\neq 0$, so dass es keine kritischen Punkte von f gibt. Daher besitzt f keine lokalen Extremstellen in $(0,5)\times(0,5)$ und die Extrema von f werden auf dem Rand von Q angenommen. Wir untersuchen f auf dem Rand von Q:

$x = 0$: $f(0,y) = 4y - 2$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(0,5) = 18$ und minimal für $y = 0$ mit $f(0,0) = -2$.

$x = 5$: $f(5,y) = 9y - 52$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(5,5) = -7$ und minimal für $y = 0$ mit $f(5,0) = -52$.

$y = 0$: $f(x,0) = -2x^2 - 2 =: g_1(x)$. Wegen $g_1'(x) = -4x \leq 0$ für $x \in [0,5]$ ist g_1 auf $[0,5]$ monoton fallend. Daher sind 0 und 5 die Extremstellen von $g_1 = f(\cdot,0)$ mit $f(0,0) = -2$ und $f(5,0) = -52$.

$y = 5$: $f(x,5) = 3x^2 - 20x + 18 =: g_2(x)$. Wegen $g_2'(x) = 6x - 20 = 0 \iff x = \frac{10}{3} \in (0,5)$ müssen wir $f(0,5) = 18$, $f(\frac{10}{3},5) = -\frac{46}{3}$ und $f(5,5) = -7$ berücksichtigen.

Insgesamt erhalten wir

$$\max_{(x,y)\in Q} f(x,y) = 18 \quad \text{und} \quad \min_{(x,y)\in Q} f(x,y) = -52.$$

Lösungen zu Aufgabe 2: Da die Menge S beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert. Definiere

$$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} h_1(x,y,z) \\ h_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) = (0,0)\}$. Zur Bestimmung der globalen Extrema von f auf S verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen: Sowohl f als auch h sind auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Wegen

$$h'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

gilt $\operatorname{rg} h'(x,y,z) < 2$ genau für $x = y = z$; solche Punkte können jedoch nicht die Nebenbedingungen $h_1(x,y,z) = 0$ und $h_2(x,y,z) = 0$ erfüllen, denn aus $x+y+z = 0$ folgte dann $x = y = z = 0$ und damit wäre $x^2+y^2+z^2 = 1$ nicht erfüllt. Also erhalten wir sämtliche Kandidaten für Extremstellen durch Anwenden der Multiplikatorenregel von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &:= f(x,y,z) + \lambda_1 h_1(x,y,z) + \lambda_2 h_2(x,y,z) \\ &= 5x + y - 3z + \lambda_1(x+y+z) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1) \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \vec{0}$, also die fünf Gleichungen

$$5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0\,, \qquad 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0\,, \qquad -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0\,,$$
$$x + y + z = 0\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\,.$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x + y + z) = 0\,,$$

wegen $x + y + z = 0$ also $\lambda_1 = -1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4 + 2\lambda_2 x = 0$, was insbesondere $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y = 0$, woraus mit $\lambda_2 \neq 0$ sofort $y = 0$ folgt. Aus $x + y + z = 0$ ergibt sich dann $z = -x$ und in $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ eingesetzt folgt $2x^2 = 1$, d.h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right).$$

Die Funktionswerte dort sind $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = 4\sqrt{2}$ bzw. $f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = -4\sqrt{2}$. Folglich besitzt f auf der Menge S das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.

Lösungen zu Aufgabe 3: a) Es gilt $\operatorname{grad} f(x, y) = (y + 1, x - 2) \overset{!}{=} (0, 0)$ genau dann, wenn $(x, y) = (2, -1)$ ist. Somit ist $(2, -1)$ der einzige kritische Punkt von f. Wegen $\det H_f(2, -1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$ ist die Hesse-Matrix $H_f(2, -1)$ indefinit, so dass f in $(2, -1)$ einen Sattelpunkt besitzt.

b) Der Gradient von f lautet $\operatorname{grad} f(x, y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2)$. Die erste Komponente ist $= 0$ genau dann, wenn $y = 2x^2$ ist. In diesem Fall ergibt sich für die zweite Komponente $-3x + 24x^4 = 3x(8x^3 - 1)$. Die kritischen Punkte sind also $(0, 0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$.

Da $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte -3 und 3 besitzt, ist $H_f(0, 0)$ indefinit. Deshalb ist $(0, 0)$ ein Sattelpunkt.

Da $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 3 und 9 besitzt, ist $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ positiv definit. Somit hat f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

Lösungen zu Aufgabe 4: Die Menge $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^4 = 1\}$ ist kompakt und f ist stetig, also nimmt f auf K sein Maximum und Minimum an. Wir verwenden die Lagrange-Multiplikatorregel, wobei hier $h(x, y) = x^2 + y^4 - 1$. Es ist $h'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 4y^3 \end{pmatrix}$, also hat h' auf K vollen Rang, da $(0, 0) \notin K$. Wir definieren nun $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y)$. Ist (x, y) Extremalwert von f unter der Nebenbedingung $h = 0$, so gilt $\nabla F = 0$, also

$$\begin{aligned} e^{x+y^2} &= -2\lambda x, \\ 2ye^{x+y^2} &= -4\lambda y^3, \\ x^2 + y^4 &= 1. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung impliziert $\lambda \neq 0$ und $x \neq 0$. Die ersten beiden Gleichungen zusammen liefern

$$-4\lambda xy = -4\lambda y^3, \text{ also } xy = y^3.$$

Ist $y = 0$, so ist $x \in \{1, -1\}$. Es ist $f(1, 0) = e$ und $f(-1, 0) = \frac{1}{e}$. Ist $y \neq 0$, so ist $x = y^2 > 0$ und wegen $x^2 + y^4 = 1$ also $x^2 = 1/2$, also $x = \sqrt{1/2}$ und $y \in \{\sqrt[4]{1/2}, -\sqrt[4]{1/2}\}$. Es ist $f(\sqrt{1/2}, \pm\sqrt[4]{1/2}) = e^{\sqrt{2}}$. Insgesamt ist das Maximum von f unter der Nebenbedingung $h = 0$ gegeben durch $e^{\sqrt{2}}$ und das Minimum durch $\frac{1}{e}$.

Lösungen zu Aufgabe 5: Äquivalent zur Mini- bzw. Maximierung des Abstandes ist die Mini- bzw. Maximierung des Abstandquadrates

$$f(x,y) := \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2.$$

Die Nebenbedingung ist durch die Kreislinie

$$h(x,y) := x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$$

gegeben. Um die Multiplikatorenregel von Lagrange anwenden zu können, muss für die in Frage kommenden Punkte

$$\operatorname{rg} h'(x,y) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2(y+1) \end{pmatrix} \overset{!}{=} 1$$

überprüft werden. Dies ist nur im kritischen Punkt $(1,-1)$ (Kreismittelpunkt) nicht erfüllt, der wegen $h(1,-1) = -1$ nicht auf der Kreislinie liegt und somit nicht Extremalkandidat ist.

Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y)$, und die notwendige Bedingung für Extrema lautet

$$\operatorname{grad} L(x,y,\leftarrow) = \begin{pmatrix} 2(x+1) + 2\lambda(x-1) \\ 2(y-1) + 2\lambda(y+1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq -1$. Daher erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen

$$x(2+2\lambda) = 2\lambda - 2 \Longleftrightarrow x = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \qquad \text{und} \qquad y(2+2\lambda) = 2 - 2\lambda \Longleftrightarrow y = -\frac{\lambda-1}{\lambda+1}.$$

Also ist $y = -x$. Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $2x^2 - 4x + 1 = 0$, also

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{und damit} \qquad y_{1,2} = -x_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich sind $P_1 = (1+\frac{1}{\sqrt{2}}, -1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ und $P_2 = (1-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1+\frac{1}{\sqrt{2}})$ Kandidaten für Extrema. Da Maximum und Minimum der stetigen Funktion f auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$ angenommen werden und außerdem $\sqrt{f(P_1)} = 1 + 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{f(P_2)} = -1 + 2\sqrt{2}$ gilt, wird im Punkt P_1 der maximale Abstand $1 + 2\sqrt{2}$ und im Punkt P_2 der minimale Abstand $1 - 2\sqrt{2}$ angenommen.