

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Lösungen zu Aufgabe 1: Schreibe $\vec{g} = f\vec{v}$ mit

$$f(x, y, z) := \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Mit der Produktregel aus 19.21 erhalten wir $\operatorname{rot} \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \nabla \times (f\vec{v}) = f(\nabla \times \vec{v}) + (\nabla f) \times \vec{v}$. Offenbar ist $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$ und $\partial_1 f(x, y, z) = -2x(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} + 8x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3}$; die anderen partiellen Ableitungen berechnet man genauso und erhält

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{8 - 2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad (\nabla f) \times \vec{v} = \vec{0}.$$

Folglich ist $\operatorname{rot} \vec{g} = \vec{0}$. Für die Divergenz ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{g} &= \nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot (f\vec{v}) = f(\nabla \cdot \vec{v}) + (\nabla f) \cdot \vec{v} \\ &= 3f + \frac{8 - 2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 2: a) Mit $\dot{\gamma}(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$ ergibt sich für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\| &= \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} \\ &= \sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} = \sqrt{2 + t^2}. \end{aligned}$$

Nach Definition des Kurvenintegrals ist dann

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \, ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} (2t - \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t}) \sqrt{2 + t^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} t \sqrt{2 + t^2} \, dt = \left[\frac{1}{3} (2 + t^2)^{3/2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} ((2 + 4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}) \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2} ((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

b) Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ \cos t \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-e^{\cos t} \sin t + \sin t \cos^2 t) \, dt = \left[e^{\cos t} - \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 3: Wir parametrisieren die 4 Teilstücke des Gesamtweges wie folgt (jeweils $t \in [0, 1]$):

$$\gamma_1(t) = (2t, 0), \quad \gamma_2(t) = (2, t), \quad \gamma_3(t) = (2 - 2t, 1), \quad \gamma_4(t) = (-t, 1 + t).$$

Damit ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ und $\int_{\gamma} \vec{f} d\vec{s} = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \vec{f} d\vec{s}_i$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \vec{f} d\vec{s}_1 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0 \\ \int_{\gamma_2} \vec{f} d\vec{s}_2 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 4t \\ 4 + t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \frac{13}{3} \\ \int_{\gamma_3} \vec{f} d\vec{s}_3 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 4 - 4t \\ 4t^2 - 8t + 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} dt = -4 \\ \int_{\gamma_4} \vec{f} d\vec{s}_4 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -2t^2 - 2t \\ 2t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Also insgesamt $\int_{\gamma} \vec{f} d\vec{s} = 0 + \frac{13}{3} - 4 + \frac{13}{3} = \frac{14}{3}$.

Alternativer Lösungsweg: Man stellt fest, dass die skalarwertige Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x, y) = x^2 y + \frac{1}{3} y^3$ ein Potential für f ist, d.h. $\vec{f} = \nabla g$ gilt (wir werden später noch sehen, warum f ein Potentialfeld ist, bzw. wieso ein solches g hier existiert). Der Wert des Kurvenintegrals hängt damit nur von Anfangs- und Endpunkt ab (vgl. 20.2 Bsp (2) im Skript) und es gilt

$$\int_{\gamma} \vec{f} d\vec{s} = g(-1, 2) - g(0, 0) = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}.$$

Lösungen zu Aufgabe 4: Erinnerung: Es ist $\operatorname{div} \vec{v} := \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z$ und $\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix}$.

Also ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v}_1 &= 3yz + 2z + 2xy + 1 - 4z = 3yz - 2z + 2xy + 1 \\ \operatorname{div} \vec{v}_2 &= y + 0 + 0 = y \\ \operatorname{rot} \vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} 0 + e^z \\ 3xy + 2x \\ y^2 - 3xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^z \\ 3xy + 2x \\ y^2 - 3xz \end{pmatrix} \\ \operatorname{rot} \vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ e^x - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x - x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 5: a) Wir benutzen die Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{\ln 2} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{\ln 2} \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \\ \sinh t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\ln 2} (\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t \cosh t) dt = \int_0^{\ln 2} (1 + \sinh t \cosh t) dt \\ &= \ln 2 + \left[\frac{1}{2} \sinh^2 t \right]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \frac{1}{2} \sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) \right)^2 = \ln 2 + \frac{9}{32}. \end{aligned}$$

b) Die Kurven $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t, 0)$, und $\gamma_2: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (1, t - 1)$, sind regulär und es gilt $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) dt + \int_1^2 \vec{v}(\gamma_2(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t) dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix} \sin 1 \\ 1 + (t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \sin t dt + \int_1^2 (1 + (t-1)^2) dt \\ &= [-\cos t]_0^1 + [t + \frac{1}{3}(t-1)^3]_1^2 = (-\cos 1 + 1) + (2 + \frac{1}{3} - 1) = \frac{7}{3} - \cos 1. \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 6: Für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ definiere $r(\vec{x}) := \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Dann ist $f = F \circ r$ und für jedes $k = 1, \dots, n$ gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_k}(\vec{x}) = \frac{2x_k}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_k}{\|\vec{x}\|}.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) = \frac{\partial(F \circ r)}{\partial x_k}(\vec{x}) = F'(r(\vec{x})) \frac{\partial r}{\partial x_k}(\vec{x}) = F'(\|\vec{x}\|) \frac{x_k}{\|\vec{x}\|}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\vec{x}) &= F''(\|\vec{x}\|) \frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^2} + F'(\|\vec{x}\|) \frac{1}{\|\vec{x}\|} + F'(\|\vec{x}\|) x_k \cdot (-1) \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \frac{x_k}{\|\vec{x}\|} \\ &= F''(\|\vec{x}\|) \frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^2} + \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^3} \right) F'(\|\vec{x}\|). \end{aligned}$$

Dies führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta f(\vec{x}) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\vec{x}) \\ &= F''(\|\vec{x}\|) \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{\|\vec{x}\|^2} + \left(\frac{n}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{\|\vec{x}\|^3} \right) F'(\|\vec{x}\|) \\ &= F''(\|\vec{x}\|) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|} F'(\|\vec{x}\|). \end{aligned}$$