Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
23.06.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Lösungen zu Aufgabe 1

Wir zeigen zunächst, dass $\vec{v}$ ein Potential f besitzt. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, genügt es zu zeigen das $\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ ist. Unter Beachtung von $\partial_y(\arctan(y)) = \frac{1}{1+y^2}$ gilt

$$(\operatorname{rot}(\vec{v}))(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2} \\ 0-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir suchen nun ein Potential f mit $\nabla f = \vec{v}$, also $\partial_x f(x,y,z) = y$, d.h. $f(x,y,z) = xy + g(y,z)$. Es gilt $\partial_y f(x,y,z) = x + \partial_y g(y,z)$, also $g(y,z) = z\arctan(y) + h(z)$. Schließlich ist $\partial_z f(x,y,z) = \arctan(y) + h'(z)$, d.h. $h' = 0$ und h ist konstant (das Potential ist wie eine Stammfunktion nicht eindeutig, Konstante können addiert werden; wir wählen $h \equiv 0$). Insgesamt haben wir $f(x,y,z) = xy + z\arctan(y)$. Damit hängt das Kurvenintegral nur von dem Anfangs- und Endpunkt ab und es gilt

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 1 + \arctan(1) - 0 = 1 + \frac{\pi}{4}$$

Lösungen zu Aufgabe 2

Offenbar ist der Integrand jeweils eine stetige Funktion; wir können daher die Integrale mit Hilfe von Satz 1 in 20.5 berechnen.

a) Es gilt

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy+y^2)\,d(x,y) = \int_0^1\int_0^1 (xy+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}\right) dx = \left[\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{3}x\right]_0^1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}\,.$$

b) Diesmal ergibt sich

$$\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\,d(x,y) = \int_{-1}^0\int_0^2 \cosh(2x+y)\,dy\,dx = \int_{-1}^0 \big[\sinh(2x+y)\big]_{y=0}^2 dx$$

$$= \int_{-1}^0 \big(\sinh(2x+2) - \sinh(2x)\big)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\cosh(2x+2) - \tfrac{1}{2}\cosh(2x)\right]_{-1}^0$$

$$= \big(\tfrac{1}{2}\cosh 2 - \tfrac{1}{2}\cosh 0\big) - \big(\tfrac{1}{2}\cosh 0 - \tfrac{1}{2}\cosh(-2)\big) = \cosh 2 - 1\,.$$

Rechnet man den hyperbolischen Cosinus noch aus, so erhält man $\frac{1}{2}(e^2 + e^{-2}) - 1$.

---

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etec2016s/

Lösungen zu Aufgabe 3

a) Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und $y = 2 - x$. Dazu müssen wir die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 2 - x$, also $x^2 + 4x - 12 = 0$ bestimmen. Dies sind $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$ (siehe auch Skizze). Für den Flächeninhalt von B ergibt sich

$$\iint\limits_B d(x,y) = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} dy\,dx = \int_{-6}^{2} \big((2-x) - (\tfrac{1}{4}x^2 - 1)\big)\,dx = \int_{-6}^{2} (-\tfrac{1}{4}x^2 - x + 3)\,dx$$
$$= \big[-\tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x\big]_{-6}^{2} = -\tfrac{2}{3} - 2 + 6 - (18 - 18 - 18) = \tfrac{64}{3}\,.$$

b) Hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4 - y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4 - y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y > 0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt{2}$ (siehe Skizze). Es gilt

$$\iint\limits_B d(x,y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{4-y^2} dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \big((4-y^2)-y^2\big)\,dy = \big[4y - \tfrac{2}{3}y^3\big]_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}\,.$$

Lösungen zu Aufgabe 4

Die Menge $G := \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z > 0\,\}$ ist einfach zusammenhängend und die Funktion $\vec{v}$ ist darauf stetig differenzierbar. (Sämtliche partiellen Ableitungen von $\vec{v}$ sind auf G stetig!) Daher gilt: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung aus Satz 2 in 20.4 erfüllt ist, wenn also $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$. Es gilt

$$\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - b \\ -3 - c \\ 1 - a \end{pmatrix}\,.$$

Wir lesen ab: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn $a = 1$, $b = 1$ und $c = -3$ gilt.
In diesem Falle können wir von

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y - 3z \\ x + 2y + z \\ -3x + y + 4z \end{pmatrix}$$

ein Potential $g\colon G \to \mathbb{R}$ bestimmen. Da $\partial_x g(x,y,z) = x + y - 3z$ gelten soll, ergibt sich

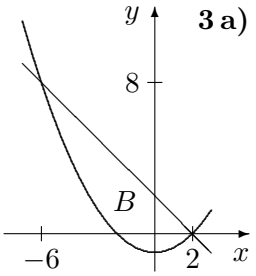
$$g(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion c. Es folgt $\partial_y g(x,y,z) = x + \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= x + 2y + z$ sein. Das bedeutet $\partial_y c(x,y) = 2y + z$, also $c(y,z) = y^2 + yz + d(z)$ mit einer gewissen Funktion d. Somit:

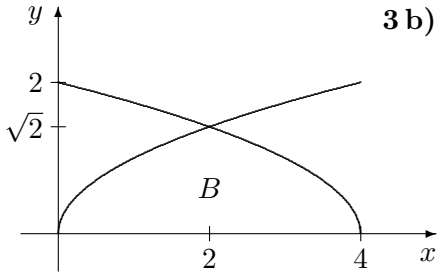
$$g(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + d(z)\,.$$

Hieraus folgt $\partial_z g(x,y,z) = -3x + y + d'(z)$, und damit ergibt sich die Forderung $d'(z) = 4z$. Wir wählen $d(z) = 2z^2$ und haben damit das Potential

$$g(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + 2z^2\,.$$



3 a)



3 b)

Lösungen zu Aufgabe 5

a) Die Funktionen sind stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung aus Satz 2 in 20.4 erfüllt ist. (Im $\mathbb{R}^3$ ist dies äquivalent dazu, dass die Rotation verschwindet.) Schreibe $\vec{v} =: (v_1, v_2, v_3)$. Wegen

$$\partial_2 v_3(x,y,z) = 2y + 3z^2x^2\,, \qquad \partial_3 v_2(x,y,z) = 3z^2x^2 \neq \partial_y v_3(x,y,z)$$

ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld, d. h. es gibt kein C^1-Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$.

Für $\vec{w} =: (w_1, w_2, w_3)$ hingegen gilt

$$\partial_2 w_3 = e^z = \partial_3 w_2\,, \qquad \partial_3 w_1 = 2z = \partial_1 w_3\,, \qquad \partial_1 w_2 = 0 = \partial_2 w_1\,.$$

Somit ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld, besitzt also ein Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für dieses Potential muss $\partial_x f(x,y,z) = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert: Es ist

$$f(x,y,z) = z^2x + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Die „Integrationskonstante“ kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $\partial_y f(x,y,z) = \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y,z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z + d(z)\,,$$

und hieraus folgt $\partial_z f(x,y,z) = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von $\vec{w}$ wird, muss $d' = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben ein Potential von $\vec{w}$:

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z\,.$$

b) Bei $\vec{v}$ müssen wir das Kurvenintegral nach Definition ausrechnen:

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \big[-\tfrac{1}{3}t^3 + t^2\big]_0^1 = \tfrac{2}{3}\,.$$

Bei $\vec{w}$ dagegen können wir auf das oben berechnete Potential f zurückgreifen:

$$\int_\gamma \vec{w}\cdot d\vec{s} = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = f(0,1,0) - f(1,0,0) = 1 - 0 = 1\,.$$

Lösungen zu Aufgabe 6

Da der Integrand jeweils eine stetige Funktion ist, kann man die Integrationsreihenfolge nach Satz 2 in 20.5 vertauschen.

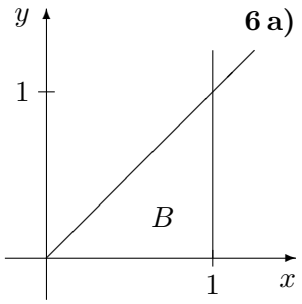
a) Es gilt

$$\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^x dy\,e^{x^2}\,dx = \int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \big[\tfrac{1}{2}e^{x^2}\big]_0^1 = \tfrac{e-1}{2}\,.$$

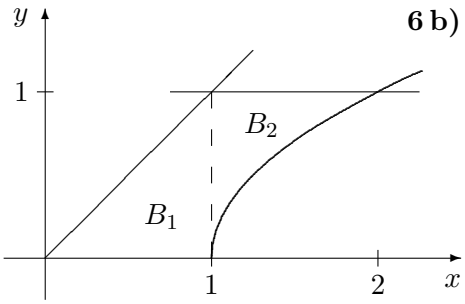
Bemerkung: Hier ist das innere Integral $\int_y^1 e^{x^2}\,dx$ nicht explizit berechenbar. Für die Bestimmung eines iterierten Integrals kann also die Integrationsreihenfolge wesentlich sein.

b) Wir spalten den Integrationsbereich B in zwei Teile B_1, B_2 auf (siehe Skizze) und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \, dx \, dy &= \iint\limits_{B_1} x^2 y \, d(x,y) + \iint\limits_{B_2} x^2 y \, d(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^x x^2 y \, dy \, dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=0}^{x} dx + \int_1^2 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=\sqrt{x-1}}^{1} dx \\
&= \int_0^1 \tfrac{1}{2} x^4 \, dx + \int_1^2 \left(\tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} x^2 (x-1)\right) dx \\
&= \left[\tfrac{1}{10} x^5\right]_{x=0}^{1} + \left[-\tfrac{1}{8} x^4 + \tfrac{1}{3} x^3\right]_{x=1}^{2} = \tfrac{1}{10} + (-2 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{67}{120} \, .
\end{aligned}$$



6 a)



6 b)