Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
28.06.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

11. Übungsblatt

Aufgaben 1-2 werden in der Übung besprochen, Aufgaben 3-5 im Tutorium.

Aufgabe 1: Es sei γ eine Kurve im Sinne von Bemerkung 20.1(d), deren Träger der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ ist. $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int\limits_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ zunächst direkt und anschließend mit dem Gaußschen Integralsatz.

Aufgabe 2: Es seien $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ mit $\alpha < \beta$ und $r\colon [\alpha, \beta] \to (0, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes mit $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$, dass für den Flächeninhalt der Menge

$$G = \big\{(r\cos t, r\sin t) \mid \alpha < t < \beta,\, 0 < r < r(t)\big\}$$

gilt:

$$I(G) = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta r^2(t)\, dt \qquad \textit{(Leibnizsche Sektorformel).}$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes:

$$\iint\limits_G (x^2 + y)\, d(x,y)\,, \qquad G := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \,\}\,.$$

Aufgabe 4: Es sei $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x - y \\ \sin y + x \end{pmatrix}$ und $G = \{(x,y) : x \in (-2,2), y \in (x^2, 4)\}$. Zeichnen Sie die Menge G und berechnen Sie $\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ direkt und unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 5: Es sei $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ y - x^2 \end{pmatrix}$ und $G = \{(x,y) : x \in (-\pi/2, \pi/2), y \in (0, cos(x))\}$. Zeichnen Sie die Menge G und berechnen Sie $\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{N} ds$ direkt und unter Verwendung des Divergenzsatzes.