Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

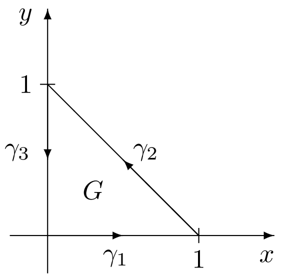
SS 2016
30.06.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Lösungen zu Aufgabe 1: Zunächst berechnen wir $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:



Definiere die regulären Kurven

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_1(t) = (t,0)\,,\\
&\gamma_2 \colon [1,2] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_2(t) = (2-t, t-1)\,,\\
&\gamma_3 \colon [2,3] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_3(t) = (0, 3-t)\,.
\end{aligned}$$

Dann haben $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die in der Skizze gekennzeichneten Träger und es gilt $\gamma_1(1) = (1,0) = \gamma_2(1)$ sowie $\gamma_2(2) = (0,1) = \gamma_3(2)$. Der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ ist gegeben durch $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (im Sinne von Bemerkung 20.1 (d)). Deshalb ist

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t \cdot 0 \\ t^2 \cdot 0 - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}\,,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_1^2 \begin{pmatrix} (2-t)^2 + (2-t)(t-1) \\ (2-t)^2(t-1) - (t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_1^2 \begin{pmatrix} 2-t \\ t^3 - 6t^2 + 10t - 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_1^2 \left(t^3 - 6t^2 + 11t - 7\right) dt = \left[\frac{1}{4}\, t^4 - 2t^3 + \frac{11}{2}\, t^2 - 7t\right]_1^2 = -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

und

$$\int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_2^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -(3-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_2^3 (3-t)^2\, dt = \left[-\frac{1}{3}\,(3-t)^3\right]_2^3 = \frac{1}{3}\,.$$

Zusammen folgt

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.$$

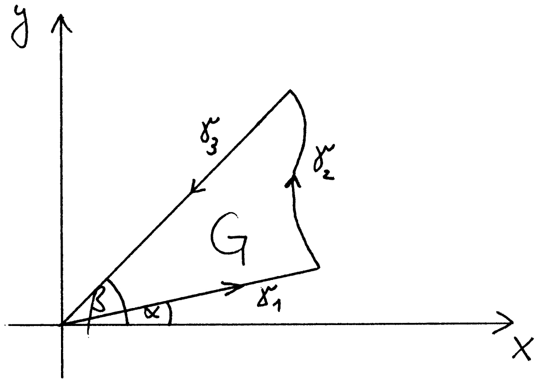
Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:

$G \subset \mathbb{R}^2$ sei das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Dann ist G offen und konvex und somit ein Gebiet. Außerdem seien $v_1(x,y) := x^2 + xy$ sowie $v_2(x,y) := x^2y - y^2$ gesetzt. Offenbar ist $\vec{v} = (v_1, v_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so dass die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes 20.6 erfüllt sind. Dieser liefert

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G \big(\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y)\big)\, d(x,y) = \iint_G (2xy - x)\, d(x,y)\,.$$

Da der Integrand stetig ist, gilt nach Satz 2 in 20.5

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy - x)\, dy\, dx = \int_0^1 \big[xy^2 - xy\big]_{y=0}^{1-x}\, dx \\
&= \int_0^1 \big(x(1-x)^2 - x(1-x)\big)\, dx = \int_0^1 \big(x^3 - x^2\big)\, dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.
\end{aligned}$$



Lösungen zu Aufgabe 2:

Der positiv orientierte Rand von G ist gegeben durch $\partial G = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, wobei die Kurvenstücke $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ folgendermaßen parametrisiert seien

$$\begin{aligned}
\gamma_1: \quad \vec{r}_1(\tau) &= \begin{pmatrix} \tau\cos\alpha \\ \tau\sin\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 \le \tau \le r(\alpha), \\
\gamma_2: \quad \vec{r}_2(t) &= \begin{pmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin t \end{pmatrix}, \quad \alpha \le t \le \beta, \\
\gamma_3: \quad \vec{r}_3(\tau) &= \begin{pmatrix} (r(\beta) - \tau)\cos\beta \\ (r(\beta) - \tau)\sin\beta \end{pmatrix}, \quad 0 \le \tau \le r(\beta).
\end{aligned}$$

Ist $\vec{v}(x,y) := (-y, x)$ gesetzt, so erhält man nach 37.1 der Vorlesung für den Flächeninhalt von G

$$I(G) = \frac{1}{2}\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s}\right).$$

Es gilt

$$\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{r(\alpha)} \vec{v}(\vec{r}_1(\tau))\cdot \vec{r}_1{}'(\tau)\,d\tau = \int_0^{r(\alpha)} \begin{pmatrix} -\tau\sin\alpha \\ \tau\cos\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix} d\tau = \int_0^{r(\alpha)} 0\,d\tau = 0\,,$$

$$\int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{r(\beta)} \vec{v}(\vec{r}_3(\tau))\cdot \vec{r}_3{}'(\tau)\,d\tau = \int_0^{r(\beta)} \begin{pmatrix} -(r(\beta)-\tau)\sin\beta \\ (r(\beta)-\tau)\cos\beta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\cos\beta \\ -\sin\beta\end{pmatrix} d\tau = \int_0^{r(\beta)} 0\,d\tau = 0\,.$$

Wegen

$$\vec{v}(\vec{r}_2(t))\cdot\vec{r}_2{}'(t) = \begin{pmatrix} -r(t)\sin t \\ r(t)\cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r'(t)\cos t - r(t)\sin t \\ r'(t)\sin t + r(t)\cos t\end{pmatrix} = r^2(t)\,(\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2(t)$$

für alle $t\in[\alpha,\beta]$ ergibt sich

$$\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_\alpha^\beta r^2(t)\,dt$$

und somit die behauptete Formel für den Flächeninhalt von G

$$I(G) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(t)\,dt\,.$$

Lösungen zu Aufgabe 3: Setzen wir $\vec{v}(x,y) := (v_1(x,y), v_2(x,y))$ mit $v_1(x,y) := -x^2y$ und $v_2(x,y) := xy$, dann ist $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und es gilt $\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y) = y + x^2$. Der Gaußsche Integralsatz liefert

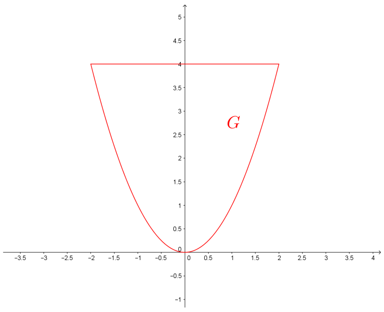
$$\iint_G (x^2+y)\,d(x,y) = \iint_G (\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y))\,d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{v}\cdot d\vec{s}.$$

Der positiv orientierte Rand ∂G der offenen Einheitskreisscheibe G ist gegeben durch die reguläre Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0\le t\le 2\pi$. Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned}
\iint_G (x^2+y)\,d(x,y) &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t\,\sin t \\ \cos t\,\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t\end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\cos^2 t\,\sin^2 t + \sin t\cos^2 t\big)\,dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}\big(\tfrac14\sin^2(2t) + \sin t\cos^2 t\big)\,dt \\
&= \tfrac14\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt - \big[\tfrac13\cos^3 t\big]_{t=0}^{2\pi} \overset{(**)}{=} \tfrac18\int_0^{4\pi}\sin^2(u)\,du \\
&= \tfrac18\Big(\tfrac12\int_0^{4\pi}\sin^2(u)\,du + \tfrac12\int_0^{4\pi}\sin^2(u)\,du\Big) \\
&\overset{(***)}{=} \tfrac18\Big(\tfrac12\int_0^{4\pi}\sin^2(u)\,du + \tfrac12\int_0^{4\pi}\cos^2(u)\,du\Big) \\
&= \tfrac18\Big(\tfrac12\int_0^{4\pi} 1\,du\Big) = \tfrac18\cdot\tfrac{4\pi}{2} = \tfrac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Hierbei verwendeten wir in $(*)$ das Additionstheorem des Sinus $2\sin t\,\cos t = \sin(2t)$, in $(**)$ die Substitution $u = 2t$ und in $(***)$ die Identität $\int_0^{4\pi}\sin^2 t\,dt = \int_0^{4\pi}\cos^2 t\,dt$.

Lösungen zu Aufgabe 4:



Klar: $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und der Satz von Gauß ist auf G anwendbar Zunächst direkte Rechnung: Wir parametrisieren ∂G durch die beiden regulären Kurven $\gamma_1(t) = (t, t^2)$, $t \in [-2, 2]$ und $\gamma_2(t) = (2-t, 4)$, $t \in [0, 4]$. Also gilt (Erläuterungen zur Rechnung nachfolgend)

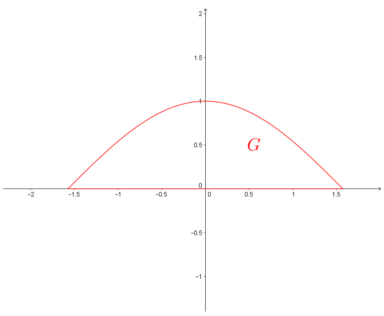
$$\begin{aligned}
\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_{-2}^{2} \begin{pmatrix} e^t - t^2 \\ \sin(t^2) + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt + \int_{0}^{4} \begin{pmatrix} e^{2-t} - 4 \\ \sin(4) + 2 - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_{-2}^{2} e^t - t^2 + 2t\sin(t^2) + 2t^2 dt + \int_{0}^{4} 4 - e^{2-t} dt \\
&= e^2 - e^{-2} + 8/3 - (-8)/3 + 16 + e^{-2} - e^2 = 48/3 + 16/3 = 64/3
\end{aligned}$$

Die Funktion $2t\sin(t^2)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, daher ist das Integral von -2 bis 2 gleich 0.

Jetzt machen wir die Rechnung unter Verwendung des Satzes von Gauß: Es ist $\partial_x v_y - \partial_y v_x = 1 + 1 = 2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \iint_G (\partial_x v_y - \partial_y v_x)(x, y) d(x, y) \\
&= \iint_G 2 d(x, y) = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} 2 dy dx = \int_{-2}^{2} 8 - 2x^2 dx = 32 - 4/3 \cdot 2^3 = 96/3 - 32/3 = 64/3
\end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 5:



Zunächst wieder die direkte Rechnung: Wir parametrisieren ∂G durch $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ und $\gamma_2(t) = (-t, \cos(t)), t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Die Normalenvektoren sind gegeben durch $N_1(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

$N_2(\gamma_2(t)) = \frac{1}{||\gamma_2'(t)||}\begin{pmatrix}-\sin(t)\\1\end{pmatrix}$. Damit (Erläuterungen zur Rechnung nachfolgend):

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial G}\vec{f}\vec{N}ds &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\begin{pmatrix}t\\-t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}dt + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\begin{pmatrix}-t-\cos(t)^2\\\cos(t)-t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(t)\\1\end{pmatrix}dt\\
&= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} t\sin(t)+\cos(t)^2\sin(t)+\cos(t)dt\\
&= [-t\cos(t)]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} - \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} -\cos(t)dt + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)dt\\
&= 0 + [2\sin(t)]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = 4
\end{aligned}$$

Beachte: Bei Wegintegralen von skalarwertigen Funktionen kommt $|\gamma'(t)|$ ins Spiel und es ist $N_2(\gamma_2(t))\cdot|\gamma_2'(t)| = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\1\end{pmatrix}$ Außerdem wurde in der Rechnung partielle Integration benutzt. Zudem ist die Funktion $\sin(t)\cos(t^2)$ punktsymmetrisch zum Ursprung, daher ist das Integral von $-\pi/2$ bis $\pi/2$ gleich 0.

Jetzt verwenden wir den Divergenzsatz von Gauß. Es ist $\operatorname{div}\vec{v}(x,y) = \partial_x v_x + \partial_y v_y = 1+1 = 2$. Damit

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial G}\vec{f}\vec{N}ds &= \iint\limits_G \operatorname{div}\vec{v}(x,y)d(x,y) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_0^{\cos x} 2dydx\\
&= 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x)dx\\
&= [2\sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4
\end{aligned}$$