Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
07.07.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Lösungen zu Aufgabe 1: a) Seien $a, b, c > 0$. Um

$$\mathrm{vol}(E) := \iiint_E d(x,y,z)$$

für die Menge

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\right\}$$

zu berechnen, führen wir die Substitution $(x,y,z) = (au, bv, cw)$ durch. Die Substitutionsfunktion lautet also $\Phi(u,v,w) = (au, bv, cw)$ und hat die Ableitung

$$\Phi'(u,v,w) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

mit $\det \Phi'(u,v,w) = abc > 0$. Ist $K := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$ gesetzt, so gilt $\Phi(K) = E$, denn

$$(u,v,w) \in K \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{au}{a}\right)^2 + \left(\frac{bv}{b}\right)^2 + \left(\frac{cw}{c}\right)^2 \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (au, bv, cw) = \Phi(u,v,w) \in E.$$

Daher erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformel 21.3

$$\iiint_E d(x,y,z) = \iiint_K abc\, d(u,v,w) = abc \iiint_K d(u,v,w)\,.$$

Nach Beispiel 21.2 (1) (mit $r = 1$) beträgt das Volumen von K: $\frac{4}{3}\pi$, so dass

$$\iiint_E d(x,y,z) = abc\,\frac{4\pi}{3}$$

folgt. Alternativ liefern Kugelkoordinaten $(u,v,w) = (r\cos\phi\,\cos\vartheta, r\sin\phi\,\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ mit $r \in [0,1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ für $\mathrm{vol}(K)$ ebenfalls

$$\iiint_K d(u,v,w) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\phi\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^2\, d\phi\, dr = \int_0^1 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi}{3}\,.$$

b) Sei $0 < r < R$. Zur Berechnung von

$$\iint_B \frac{y}{x}\, d(x,y)\,, \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \|(x,y)\| \in [r,R],\, |y| \leq x\right\}$$

führen wir Polarkoordinaten ein:

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi \quad \text{mit } \rho \in [r,R],\ \phi \overset{(*)}{\in} [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}].$$

(Hierbei ergibt sich $(*)$ durch die Bedingung $|y| \le x$. Würde man $\phi \in [0, 2\pi]$ fordern, so müsste man $\phi \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{7}{4}\pi, 2\pi]$ wählen und B in $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \in [r, R], 0 \le y \le x\}$ und $B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \in [r, R], -x \le y \le 0\}$ zerlegen. Dann ist $\iint_B \frac{y}{x}\, d(x, y) = \iint_{B_1} \frac{y}{x}\, d(x, y) + \iint_{B_2} \frac{y}{x}\, d(x, y)$.) Wir erhalten

$$\iint\limits_B \frac{y}{x}\, d(x, y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_r^R \frac{\sin\phi}{\cos\phi}\, \rho\, d\rho\, d\phi = \tfrac{1}{2}(R^2 - r^2) \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan\phi\, d\phi = 0.$$

Das letzte Gleichheitszeichen ergibt sich, weil der Tangens eine ungerade Funktion ist und über ein zu 0 symmetrisches Intervall integriert wird.

Lösungen zu Aufgabe 2: a) Wir setzen in die Ungleichung, die G definiert, Polarkoordinaten ein, also $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ mit $r \ge 0$ und $0 \le \phi < 2\pi$:

$$(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi)^2 < 3r^2\cos^2\phi + 4r^2\sin^2\phi\,.$$

Wegen $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ bedeutet das $r^4 < r^2(3 + \sin^2\phi)$. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $r \neq 0$ und $r^2 < 3 + \sin^2\phi$. Der Rand von G besteht folglich aus dem Punkt $(0, 0)$ und der durch die Parametrisierung

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin t \end{pmatrix} \quad (0 \le t \le 2\pi)\,, \qquad \text{wobei } r(t) := \sqrt{3 + \sin^2 t}\,,$$

gegebenen Kurve.

b) Die Leibnizsche Sektorformel liefert für den Flächeninhalt von G

$$A(G) = \tfrac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} r^2(t)\, dt = \tfrac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (3 + \sin^2 t)\, dt = \tfrac{1}{2}(6\pi + \pi) = \tfrac{7}{2}\pi\,.$$

Lösungen zu Aufgabe 3: a) Wie wir aus der Vorlesung wissen, gilt für jedes zweimal stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{w}$ die Gleichung

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{w}) = 0\,, \qquad \text{also} \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{w}) = 0\,.$$

Daraus können wir folgern: Ist $\vec{v} = \nabla \times \vec{w}$, so muss $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (also $\operatorname{div}\vec{v} = 0$) gelten.

b) Für die gegebene Funktion $\vec{v} =: (v_1, v_2, v_3)$ gilt

$$\operatorname{div}\vec{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3 = 0 + 0 + 0 = 0\,,$$

die Bedingung aus **a)** ist also erfüllt.

Gemäß Hinweis suchen wir jetzt ein Vektorpotential der Form $\vec{w} = (w_1, w_2, 0)$. Es ist

$$\nabla \times \vec{w} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_z w_2 \\ \partial_z w_1 \\ \partial_x w_2 - \partial_y w_1 \end{pmatrix}.$$

Damit $\nabla \times \vec{w} = \vec{v}$ erfüllt ist, muss insbesondere $-\partial_z w_2 = v_1 = y - z$ gelten. Somit ist

$$w_2(x, y, z) = -yz + \tfrac{1}{2}z^2 + c(x, y)$$

mit einer gewissen Funktion $c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ferner soll $\partial_z w_1 = v_2 = z - x$ gelten; folglich ist

$$w_1(x, y, z) = \tfrac{1}{2}z^2 - xz + d(x, y)$$

mit einer gewissen Funktion $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Damit ergibt sich

$$\partial_x w_2(x, y, z) - \partial_y w_1(x, y, z) = \partial_x c(x, y) - \partial_y d(x, y)\,.$$

Die Funktionen c und d müssen nun so gewählt werden, dass $\partial_x c(x,y) - \partial_y d(x,y) = v_3 = x - y$ gilt. Für $\partial_x c(x,y) = x$ und $\partial_y d(x,y) = y$ ist dies der Fall; beispielsweise können wir $c(x,y) = \frac{1}{2}x^2$ und $d(x,y) = \frac{1}{2}y^2$ wählen. Ein Vektorpotential von $\vec{v}$ ist dann

$$\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z^2 - xz + \frac{1}{2}y^2 \\ -yz + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

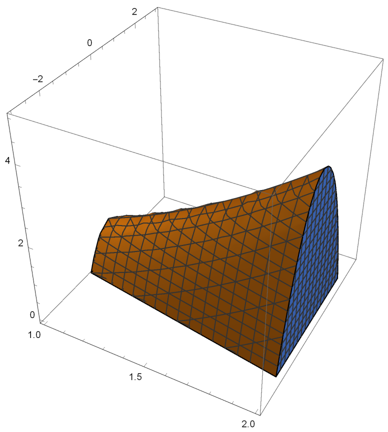
Lösungen zu Aufgabe 4: a) Für $(x,y,z) \in A$ gilt nach Definition der Menge $x \in [1,2]$ sowie $0 \leq x^2 - y^2$, also $y^2 \leq x^2$, d.h. $|y| \leq |x| = x$ wegen $x > 0$. Mit

$$A_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [1,2], \ -x \leq y \leq x\}$$

lässt sich A folgendermaßen schreiben

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in A_0, \ 0 \leq z \leq x^2 - y^2\}.$$

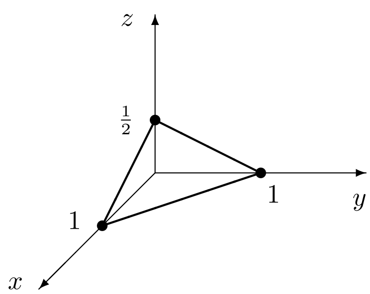
[In der Notation von Abschnitt 21.2: $B_0 = A_0$, $a = 1$, $b = 2$, $u(x) = -x$, $v(x) = x$, $g(x,y) = 0$, $h(x,y) = x^2 - y^2$.]



Da der Integrand $f(x,y,z) = 1$ stetig ist, erhält man nach 21.2

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(A) &= \iiint\limits_A d(x,y,z) = \int_1^2 \int_{-x}^{x} \int_0^{x^2-y^2} dz\, dy\, dx = \int_1^2 \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\, dy\, dx \\ &= \int_1^2 \left[x^2 y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=-x}^{x} dx = \int_1^2 \tfrac{4}{3}x^3\, dx = \left[\tfrac{1}{3}x^4\right]_{x=1}^{2} = \tfrac{1}{3}(16-1) = 5\,.\end{aligned}$$

b)



Die Menge B wird von den Koordinatenebenen und von der Ebene durch die drei Punkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,\frac{1}{2})$ begrenzt (siehe Skizze). Damit ist $(x,y,z) \in B$ äquivalent zu

$$0 \leq x \leq 1\,, \quad 0 \leq y \leq 1 - x\,, \quad 0 \leq z \leq \tfrac{1}{2}(1 - x - y)\,.$$

Bei B handelt es sich also um

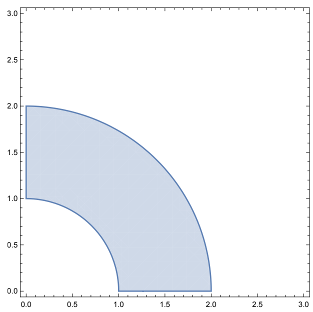
$$B = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in B_0\,,\ 0 \le z \le \tfrac{1}{2}(1-x-y) \}\,,$$
$$\text{wobei} \quad B_0 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1-x \}\,.$$

Da $(x,y,z) \mapsto \sin(z)$ auf B stetig ist, ergibt sich für das Integral nach 21.2

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B \sin z\, d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{(1-x-y)/2} \sin z\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \big[-\cos z\big]_{z=0}^{(1-x-y)/2}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big(-\cos\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + 1\Big)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \big[2\sin\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + y\big]_{y=0}^{1-x}\, dx = \int_0^1 \Big(1 - x - 2\sin\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\Big)\, dx \\
&= \big[x - \tfrac{1}{2}x^2 - 4\cos\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\big]_{x=0}^{1} = \big(1 - \tfrac{1}{2} - 4\cos 0\big) + 4\cos(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{7}{2} + 4\cos(\tfrac{1}{2})\,.
\end{aligned}$$

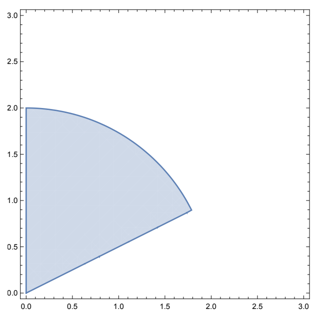
Lösungen zu Aufgabe 5: Seien $R \ge r \ge 0$. Geometrische Überlegungen führen auf

$$\begin{aligned}
A &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, r^2 \le x^2 + y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\big\} \\
&= \big\{(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) \,:\, r \le \rho \le R,\ 0 \le \phi \le \tfrac{\pi}{2}\big\}.
\end{aligned}$$



Nun seien $R \ge 0$ und $a > 0$. Die Bedingung $x \ge 0$ bedeutet $\cos\phi \ge 0$, also $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ oder $\phi \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. Zusätzlich muss wegen $y \ge ax$ die Ungleichung $\sin\phi \ge a\cos\phi$ gelten. Diese ist für kein $\phi \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ erfüllt. Auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\sin\phi \ge a\cos\phi$ für $\phi = \frac{\pi}{2}$ und $\phi \in [0, \frac{\pi}{2})$ mit $\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} \ge a$, also $\phi = \frac{\pi}{2}$ oder $\phi \ge \arctan a \in (0, \frac{\pi}{2})$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
B &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge ax\big\} \\
&= \big\{(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) \,: 0 \le \rho \le R,\ \arctan a \le \phi \le \tfrac{\pi}{2}\big\}.
\end{aligned}$$



Lösungen zu Aufgabe 6: Wir berechnen zunächst die Volumina der beiden Mengen: Die Menge

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \tfrac{1}{16}x^2 + \tfrac{1}{8}y^2 + z^2 \le 1 \}$$

ist ein Ellipsoid, und es gilt $M = \Phi(K)$ für

$$K := \{ (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \le 1 \}, \qquad \Phi(u,v,w) := (4u, \sqrt{8}\,v, w).$$

Aus der Vorlesung ist bekannt: $\mathrm{vol}(K) = \frac{4}{3}\pi$. Wegen

$$\det \Phi'(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4\sqrt{8} = 8\sqrt{2}$$

liefert die Transformationsformel also

$$\mathrm{vol}(M) = \iiint\limits_{\Phi(K)} 1\, d(x,y,z) = \iiint\limits_{K} 1 \cdot |8\sqrt{2}|\, d(u,v,w) = 8\sqrt{2}\ \mathrm{vol}(K) = \tfrac{32}{3}\sqrt{2}\,\pi$$

[vgl. Aufgabe **1 a)** mit $a = 4$, $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $c = 1$]. Für die neue Marzipankartoffel ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\widetilde{M}) &= \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int\limits_{-\sqrt{3-x^2}\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-x^2}\sqrt{3-y^2}} 1\, dz\, dy\, dx \\
&= \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{3-x^2}\sqrt{3-y^2}\, dy\, dx \\
&= 2\Big(\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\, dx \Big)\Big(\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-y^2}\, dy \Big) = 2\Big(\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\, dx \Big)^2;
\end{aligned}$$

mit der Substitution $x = \sqrt{3}\,t$, $dx = \sqrt{3}\,dt$ folgt

$$= 2\Big(\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{3-3t^2} \cdot \sqrt{3}\, dt \Big)^2 = 18\Big(\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt \Big)^2,$$

und die Substitution $t = \sin\tau$, $dt = \cos\tau\, d\tau$ liefert

$$= 18\Big(\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\tau}\, \cos\tau\, d\tau \Big)^2 = 18\Big(\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\tau\, d\tau \Big)^2.$$

Wegen $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\tau\, d\tau = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\tau\, d\tau = \frac{\pi}{2}$ folgt $\mathrm{vol}(\widetilde{M}) = \frac{9}{2}\pi^2$.

Nun gilt es noch festzustellen, ob der Quotient $\mathrm{vol}(\widetilde{M})/\mathrm{vol}(M)$ größer oder kleiner als das Preisverhältnis 0,97 ist. Statt zum neumodischen Taschenrechner zu greifen, zeigen wir $\mathrm{vol}(\widetilde{M})/\mathrm{vol}(M) < 0{,}97$ allein durch Verwendung der Abschätzungen $\pi < 3{,}2$ und $\sqrt{2} > 1{,}4$:

$$\frac{\mathrm{vol}(\widetilde{M})}{\mathrm{vol}(M)} = \frac{\frac{9}{2}\pi^2}{\frac{32}{3}\sqrt{2}\,\pi} = \frac{27\pi}{64\sqrt{2}} < \frac{27 \cdot 3{,}2}{64 \cdot 1{,}4} = \frac{27}{28} = 1 - \frac{1}{28} = 1 - \frac{3}{84} < 1 - \frac{3}{100} = 0{,}97.$$

Also: Wir kaufen die bewährte Marzipankartoffel, da wir auf diese Weise pro Geldeinheit mehr Volumen bekommen.