

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Lösungen zu Aufgabe 1: a) Wir ersetzen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$, wobei $r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]$.

Damit werden die Bedingungen aus C zu $r^2 \leq 2, \cos \phi \sin \theta < 0, \sin \phi \sin \theta \geq 0$ und $\cos \theta \leq 0$. Die letzte Ungleichung bedeutet $\theta \in [\pi/2, \pi]$ und dort ist $\sin \theta \geq 0$. Daher muss $\cos \phi < 0, \sin \phi \geq 0$ und $\sin \theta > 0$ sein. Das führt auf $\theta \in (\pi/2, \pi)$ und $\phi \in (\pi/2, \pi]$. Zudem ist $\vec{0} \notin C$, d.h. $r \neq 0$. Insgesamt:

$$\begin{aligned} & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x < 0, y \geq 0, z \leq 0\} \\ &= \{(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) : r \in (0, \sqrt{2}], \phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi], \theta \in [\pi/2, \pi)\}. \end{aligned}$$

b) Definiere $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Dann müssen wir

$$m := \iiint_B \rho(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_K \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z)$$

berechnen. Hierzu benutzen wir Kugelkoordinaten

$$x = r \cos \phi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \phi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta \quad \text{mit } r \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi].$$

Die Transformationsformel liefert

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + r^2} r^2 \sin \vartheta d\phi d\vartheta dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi \frac{r^2}{1 + r^2} \sin \vartheta d\vartheta dr \\ &= 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{1 + r^2} dr = 4\pi \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + r^2}\right) dr \\ &= 4\pi(1 - [\arctan r]_{r=0}^1) = 4\pi(1 - (\frac{\pi}{4} - 0)) = 4\pi - \pi^2. \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 2: Wir bestimmen zunächst, welcher Teil $\mathcal{F}_Z$ von $\mathcal{F}$ innerhalb von Z liegt:

$$\vec{g}(u, v) \in Z \iff (u + v)^2 + (u - v)^2 \leq 4 \iff 2u^2 + 2v^2 \leq 4.$$

Die Fläche $\mathcal{F}_Z$ ist also durch $\vec{g}(u, v)$ mit $(u, v) \in U := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 2\}$ gegeben. Definitionsgemäß ist dann

$$A(\mathcal{F}_Z) = \iint_{\mathcal{F}_Z} d\sigma = \iint_U \|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\| d(u, v).$$

Hier haben wir

$$\partial_u \vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} 2u + 2v \\ 2v - 2u \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$A(\mathcal{F}_Z) = \iint_U \sqrt{(2u+2v)^2 + (2v-2u)^2 + 4} \, d(u, v) = \iint_U \sqrt{8(u^2 + v^2) + 4} \, d(u, v).$$

Wir gehen zu Polarkoordinaten über: $u = r \cos \phi$, $v = r \sin \phi$, $d(u, v) = r \, d(r, \phi)$, mit $0 \leq r \leq \sqrt{2}$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} A(\mathcal{F}_Z) &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2(r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi) + 1} \cdot r \, d\phi \, dr = 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{2r^2 + 1} \, dr \\ &= \frac{2}{3}\pi[(2r^2 + 1)^{3/2}]_{r=0}^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\pi(5^{3/2} - 1) = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 3: Wir benutzen Kugelkoordinaten. Dann:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \mid r = 4, \theta \in [0, \pi/2), \phi \in [0, 2\pi] \right\} = \{\vec{g}(\phi, \theta) \mid \theta \in [0, \pi/2), \phi \in [0, 2\pi]\},$$

wobei $\vec{g}(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} 4 \cos \phi \sin \theta \\ 4 \sin \phi \sin \theta \\ 4 \cos \theta \end{pmatrix}$. Das vektorielle Oberflächenelement ist also gegeben durch

$$d\vec{\sigma} = \partial_\phi \vec{g}(\phi, \theta) \times \partial_\theta \vec{g}(\phi, \theta) d(\phi, \theta) = -16 \begin{pmatrix} \cos \phi \sin^2 \theta \\ \sin \phi \sin^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} d(\phi, \theta)$$

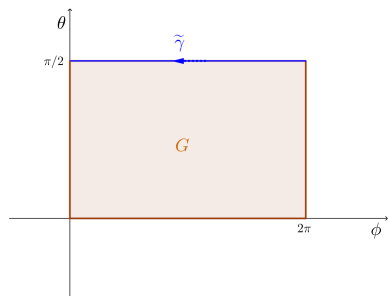
a) Es ist $\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4yz \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit (Integrationsreihenfolge ist egal)

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = -16 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 64 \sin^3 \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi + \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= -16 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 64 \sin^3 \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi \, d\phi \, d\theta - 16 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= -16 \cdot \int_0^{\pi/2} [32 \sin^3 \theta \cos \theta \sin^2 \phi]_{\phi=0}^{2\pi} d\theta - 32\pi [1/2 \sin^2 \theta]_{\theta=0}^{\pi/2} \\ &= -16\pi \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = 0\}.$$

∂S wird zum Beispiel parametrisiert durch $\gamma_1(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Die entscheidende Frage ist aber: passen die Orientierungen zusammen, so wie es der Satz von Stokes fordert? Dazu betrachten wir die Charakterisierung von S via Kugelkoordinaten von oben. Die Menge ∂S entspricht dem Fall $\theta = \pi/2$.



Da die Menge G (s. Bild), welche für die Parametrisierung von S verantwortlich ist, und diese Menge links von $\tilde{\gamma}$ liegen soll, folgt $\tilde{\gamma} = (2\pi - t, \pi/2)$, $t \in [0, 2\pi]$. Damit die Orientierungen zusammenpassen parametrisieren wir also ∂S durch $\gamma(t) = g(\tilde{\gamma}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, also $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 4 \cos(2\pi - t) \\ 4 \sin(2\pi - t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cos t \\ -4 \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. Damit:

$$I = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 8 \cos t + 4 \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \sin t \\ -4 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} -32 \sin t \cos t - 16 \sin^2 t dt$$

$$\stackrel{\text{Hinweis}}{=} -[16 \sin^2 t]_{t=0}^{2\pi} - 16\pi = -16\pi$$

Beachte: Mit einer anderen Parametrisierung könnte man auch $+16\pi$ statt -16π als Ergebnis erhalten (in beiden Fällen).

Lösungen zu Aufgabe 4: Eine Parametrisierung des Kegelmantels $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ r \end{pmatrix} =: \vec{g}(r, \phi) \quad \text{mit } (r, \phi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Mit

$$\|\partial_r \vec{g}(r, \phi) \times \partial_\phi \vec{g}(r, \phi)\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -r \cos \phi \\ -r \sin \phi \\ r \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} r$$

und

$$\|\vec{g}(r, \phi) - \vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ r - 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2r^2 - 2r + 1}$$

erhält man

$$U(\vec{a}) = \rho \iint_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} d\sigma = \rho \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \frac{1}{\|\vec{g}(r, \phi) - \vec{a}\|} \|\partial_r \vec{g}(r, \phi) \times \partial_\phi \vec{g}(r, \phi)\| dr d\phi$$

$$= \rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2r^2 - 2r + 1}} \sqrt{2} r d\phi dr = 2\sqrt{2} \pi \rho \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2 - 2r + 1}} dr \stackrel{\text{Hinweis}}{=} -2\pi \rho \ln(\sqrt{2} - 1).$$

Lösungen zu Aufgabe 5: Die Fläche $\mathcal{F} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ liegt in expliziter Darstellung vor mit $f(x, y) = x^2 + y^2$ bzw. in Parameterdarstellung $\mathcal{F} = \{\vec{g}(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ mit

$$\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist

$$A(\mathcal{F}) = \iint_{\mathcal{F}} d\sigma = \iint_B \|\partial_x \vec{g}(x, y) \times \partial_y \vec{g}(x, y)\| d(x, y) = \iint_B \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x, y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} \right\| d(x, y)$$

$$= \iint_B \left\| \begin{pmatrix} -\partial_x f(x, y) \\ -\partial_y f(x, y) \\ 1 \end{pmatrix} \right\| d(x, y) = \iint_B \sqrt{(\partial_x f(x, y))^2 + (\partial_y f(x, y))^2 + 1} d(x, y)$$

$$= \iint_B \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} d(x, y).$$

Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$A(\mathcal{F}) = \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, d(r, \phi) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr = 2\pi \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1).$$

Lösungen zu Aufgabe 6: Eine Parametrisierung der Fläche $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 - u^2 \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in U := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3 \}.$$

Der Stokessche Integralsatz liefert

$$\int_{\partial \mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o} = \iint_U (\nabla \times \vec{v})(\vec{g}(u, v)) \cdot (\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)) \, d(u, v).$$

Nun ist

$$\partial_u \vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 1 - (-2) \\ 9 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich

$$\int_{\partial \mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_U \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} \, d(u, v) = \iint_U (8u - 6v + 14) \, d(u, v);$$

und mit Polarkoordinaten (U ist die Kreisscheibe um $(0, 0)$ mit Radius $\sqrt{3}$) erhält man unter Berücksichtigung von $\int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\phi = 0$:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (8r \cos \phi - 6r \sin \phi + 14) \, r \, d\phi \, dr = \int_0^{\sqrt{3}} 28\pi r \, dr \\ &= 28\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{\sqrt{3}} = 28\pi \cdot \frac{3}{2} = 42\pi. \end{aligned}$$