

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Lösungen zu Aufgabe 1: a) Die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Zylinders Z besteht aus drei Teilen, nämlich aus der Bodenfläche $\mathcal{F}_1$, der Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ und der oberen Deckfläche $\mathcal{F}_3$.

Die Bodenfläche $\mathcal{F}_1$ können wir durch die Parametrisierung $\vec{g}(u, v) := (u \cos v, u \sin v, 0)$ mit $(u, v) \in U := [0, 1] \times [0, 2\pi]$ darstellen. Es gilt

$$\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \cos^2 v + u \sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $\vec{N} = (0, 0, -1)$ als äußere Einheitsnormale. (Man teilt $\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)$ durch die Norm $\|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\|$ und wählt dann noch das Vorzeichen so, dass der Vektor nach außen weist.) Also ist $\iint_{\mathcal{F}_1} \vec{v} \cdot \vec{N} \, d\sigma = 0$, denn

$$(\vec{v}(\vec{g}(u, v))) \cdot (\vec{N}(\vec{g}(u, v))) = v_3(\vec{g}(u, v))(-1) = 0.$$

Die Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ wird durch $\vec{g}(u, v) := (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u, v) \in U := [0, 2\pi] \times [0, 1]$ parametrisiert. Wir erhalten

$$\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist auch schon die äußere Einheitsnormale $\vec{N}$. Wegen

$$(\vec{v}(\vec{g}(u, v))) \cdot (\vec{N}(\vec{g}(u, v))) = \begin{pmatrix} \cos^3 u \\ \cos^2 u \sin u \\ v \cos^2 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \cos^4 u + \cos^2 u \sin^2 u = \cos^2 u$$

folgt

$$\iint_{\mathcal{F}_2} \vec{v} \cdot \vec{N} \, d\sigma = \iint_U \cos^2 u \underbrace{\|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\|}_{=\cos^2 u + \sin^2 u = 1} d(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2 u \, dv \, du = \int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du = \pi.$$

Es bleibt noch die Deckfläche $\mathcal{F}_3$: Die Parametrisierung $\vec{g}(u, v) := (u \cos v, u \sin v, 1)$ mit $(u, v) \in U := [0, 1] \times [0, 2\pi]$ liefert $\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v) = (0, 0, u)$. Es ist $\vec{N} = (0, 0, 1)$ und damit

$$(\vec{v}(\vec{g}(u, v))) \cdot (\vec{N}(\vec{g}(u, v))) = v_3(\vec{g}(u, v)) = u^2 \cos^2 v.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}_3} \vec{v} \cdot \vec{N} \, d\sigma &= \iint_U u^2 \cos^2 v \underbrace{\|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\|}_{=|u|=u, \text{ da } u \geq 0} d(u, v) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u^3 \cos^2 v \, dv \, du \\ &= \left(\int_0^1 u^3 \, du \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 v \, dv \right) = \frac{1}{4} \pi. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich schließlich

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = \sum_{k=1}^3 \iint_{\mathcal{F}_k} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = 0 + \pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi.$$

b) Nach dem Gaußschen Integralsatz bzw. dem Divergenzsatz ist

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = \iiint_Z (\nabla \cdot \vec{v}) \, d(x, y, z).$$

Nun gilt $(\nabla \cdot \vec{v})(x, y, z) = \partial_x(x^3) + \partial_y(x^2 y) + \partial_z(x^2 z) = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$ und mit Zylinderkoordinaten $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = z$, wobei $r \in [0, 1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 1]$, folgt

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do &= \iiint_Z 5x^2 \, d(x, y, z) = \iiint_{[0,1] \times [0,2\pi] \times [0,1]} 5(r \cos \phi)^2 r \, d(r, \phi, z) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 5r^3 \cos^2 \phi \, dz \, d\phi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 5r^3 \cos^2 \phi \, d\phi \, dr \\ &= 5 \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi \right) = \frac{5}{4}\pi. \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 2: Zur Berechnung von

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{v} \, d(x, y, z)$$

verwenden wir Kugelkoordinaten

$$x = r \cos \phi \cos \vartheta, \quad y = r \sin \phi \cos \vartheta, \quad z = r \sin \vartheta \quad \text{mit} \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \vec{v} \, d(x, y, z) &= \iiint_V (2 + 3z^2) \, d(x, y, z) = 2 \underbrace{\iiint_V d(x, y, z)}_{= \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3, \text{ da } V \text{ Halbkugel}} + 3 \iiint_V z^2 \, d(x, y, z) \\ &= \frac{4}{3}\pi + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \vartheta \, r^2 \cos \vartheta \, d\phi \, dr \, d\vartheta \\ &= \frac{4}{3}\pi + 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^4 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \, dr \, d\vartheta \\ &= \frac{4}{3}\pi + 6\pi \left(\int_0^1 r^4 \, dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi + \frac{6}{5}\pi \left[\frac{1}{3} \sin^3 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi + \frac{6}{5}\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{26}{15}\pi. \end{aligned}$$

Die Oberfläche ∂V von V setzt sich zusammen aus $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$, wobei $\mathcal{F}_1$ die Kugelschalenhälfte und $\mathcal{F}_2$ die Grundkreisscheibe sind. Als Parametrisierungen nehmen wir

$$\mathcal{F}_1 = \{ \vec{g}_1(\phi, \vartheta) : \phi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}] \} \quad \text{mit} \quad \vec{g}_1(\phi, \vartheta) := \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \vartheta \\ \sin \phi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

(Kugelkoordinaten der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius $r = 1$) und

$$\mathcal{F}_2 = \{\vec{g}_2(r, \phi) : r \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi]\} \quad \text{mit } \vec{g}_2(r, \phi) := \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Polarkoordinaten der Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius 1 in der xy -Ebene $z = 0$). Setze

$$\vec{n}_1(\phi, \vartheta) := \partial_\phi \vec{g}_1(\phi, \vartheta) \times \partial_\vartheta \vec{g}_1(\phi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \vartheta \\ \cos \phi \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos \phi \sin \vartheta \\ -\sin \phi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos^2 \vartheta \\ \sin \phi \cos^2 \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Da die dritte Komponente von $\vec{n}_1(\phi, \vartheta)$ nichtnegativ ist, zeigt $\vec{n}_1(\phi, \vartheta)$ nach außen. (Achtung: $\vec{n}_1(\phi, \vartheta)$ ist nicht normiert!) Für den Normaleneinheitsvektor an $\mathcal{F}_2$ nach außen ergibt sich

$$\vec{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}_1} \vec{v} \cdot \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|} d\phi d\vartheta &= \iint_{[0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \vec{v}(\vec{g}_1(\phi, \vartheta)) \cdot \frac{\vec{n}_1(\phi, \vartheta)}{\|\vec{n}_1(\phi, \vartheta)\|} \|\vec{n}_1(\phi, \vartheta)\| d\phi d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos \vartheta (\cos \phi + \sin \phi) \\ \cos \vartheta (\sin \phi - \cos \phi) \\ \sin^3 \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \cos^2 \vartheta \\ \sin \phi \cos^2 \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 \vartheta \cos \phi (\cos \phi + \sin \phi) + \cos^3 \vartheta \sin \phi (\sin \phi - \cos \phi) + \sin^4 \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 \vartheta + \sin^4 \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta d\phi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta (1 - \sin^2 \vartheta) + \sin^4 \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta \\ &= \left[\sin \vartheta - \frac{1}{3} \sin^3 \vartheta + \frac{1}{5} \sin^5 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{26}{15} \pi \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}_2} \vec{v} \cdot \vec{N}_2 d\phi dr &= \iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} \vec{v}(\vec{g}_2(r, \phi)) \cdot \vec{N}_2(\vec{g}_2(r, \phi)) \|\partial_r \vec{g}_2(r, \phi) \times \partial_\phi \vec{g}_2(r, \phi)\| dr d\phi \\ &= \iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} \begin{pmatrix} r(\cos \phi + \sin \phi) \\ r(\sin \phi - \cos \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \|\partial_r \vec{g}_2(r, \phi) \times \partial_\phi \vec{g}_2(r, \phi)\| dr d\phi \\ &= \iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} 0 \|\partial_r \vec{g}_2(r, \phi) \times \partial_\phi \vec{g}_2(r, \phi)\| dr d\phi = 0 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\iint_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{N} d\sigma = \iint_{\mathcal{F}_1} \vec{v} \cdot \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|} d\phi d\vartheta + \iint_{\mathcal{F}_2} \vec{v} \cdot \vec{N}_2 d\phi dr = \frac{26}{15} \pi.$$

Fazit: Es ist

$$\iint_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{N} d\sigma = \frac{26}{15} \pi = \iiint_V \nabla \cdot \vec{v} d(x, y, z).$$