Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
26.04.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

2. Übungsblatt

Aufgaben 1-3 werden in der Übung besprochen, Aufgaben 4-6 im Tutorium.

Aufgabe 1: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$ Eigenwerte von A sind, indem Sie $\mathrm{Kern}(A+2I)$ und $\mathrm{Kern}(A-I)$ bestimmen.

b) Ist A diagonalisierbar? Falls ja, finden Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 2: Seien $i, j, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \le i \le j \le n$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gegeben. Finden Sie eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so, dass α Eigenwert von M mit geometrischer Vielfachheit i und algebraischer Vielfachheit j ist.

Tipp: Verwenden Sie eine Dreiecksmatrix.

Aufgabe 3:

1. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume für die Matrix
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Geben Sie die geometrische und algebraische Vielfachheit der jeweiligen Eigenwerte an.
3. Geben Sie die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren von M an.
4. Entscheiden Sie, ob M diagonalisierbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie alle Eigenwerte von
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und geben Sie eine reguläre Matrix S an so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von
$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte? Welche Matrix ist diagonalisierbar?

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etec2016s/

Aufgabe 6: Gegeben sei das System linearer Differentialgleichungen

$$u' = 8u - 6v,$$
$$v' = 9u - 7v.$$

Stellen Sie dieses mit Hilfe einer geeigneten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in der Form

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1}$$

dar. Begründen Sie, dass A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, und definieren Sie Funktionen $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ so, dass (1) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

ist. Da D Diagonalgestalt besitzt, erhält man zwei entkoppelte Gleichungen, aus denen sich $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ berechnen lassen. Bestimmen Sie damit die Lösungen des Systems (1).